Logika 2 voor filosofen

Uitwerking tussentoets

Opgave 1. Bewijs met natuurlijke deductie dat

- $\vdash ((A \vee B) \wedge \neg A) \to B$,

Veel studenten vonden dit een moeilijke opgave. Dit kwam achteraf bleek vooral omdat de definitie van de $\vee$ eliminatie regel niet goed bekend was. Het volgende bewijs is geheel conform de regels.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(A \vee B) \wedge \neg A]_1}{A \vee B}\wedge\mathrm{E}_l \qquad \dfrac{\dfrac{[A]_2 \qquad \dfrac{[(A \vee B) \wedge \neg A]_1}{\neg A}\wedge\mathrm{E}_r}{\bot}\to\mathrm{E}}{B}\bot \qquad [B]_3}{B}\vee\mathrm{E}_{2,3}}{((A \vee B) \wedge \neg A) \to B}\to\mathrm{I}_1$$

Opgave 2. Bewijs nu met inductie dat voor alle natuurlijke getallen n geldt

$$\Sigma_{i=0}^{n}(\frac{1}{2})^i = 2 - (\frac{1}{2})^n.$$

We moeten hier dus gewoon onze mantra afdraaien.

Te Bewijzen: $\forall n \in N \;\; \Sigma_{i=0}^{n}(\frac{1}{2})^i = 2 - (\frac{1}{2})^n$.
Bewijs: Het bewijs gaat met inductie naar n.

Basis: Als $n = 0$ hebben we $\Sigma_{i=0}^{0}(\frac{1}{2})^i = (\frac{1}{2})^0 = 1 = 2 - 1 = 2 - \frac{1}{2})^0$. Krulletje.

Inductie: We moeten nu dus laten zien dat $\Sigma_{i=0}^{n+1}(\frac{1}{2})^i = 2 - (\frac{1}{2})^{n+1}$ uitgaande van het “feit” dat $\Sigma_{i=0}^{n}(\frac{1}{2})^i = 2 - (\frac{1}{2})^n$.

We schrijven:

$$\begin{array}{ll}
\Sigma_{i=0}^{n+1}(\frac{1}{2})^i & =_{\text{def}} \\
\Sigma_{i=0}^{n}(\frac{1}{2})^i + (\frac{1}{2})^{n+1} & =_{\text{IH}} \\
2 - (\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{2})^{n+1} & =_{\text{algebra}} \\
2 - ((\frac{1}{2})^n - (\frac{1}{2})^{n+1}) & =_{\text{algebra}} \\
2 - (\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}) & =_{\text{algebra}} \\
2 - (\frac{2\cdot 1}{2\cdot 2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}) & =_{\text{algebra}} \\
2 - (\frac{2}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}) & =_{\text{algebra}} \\
2 - \frac{1}{2^{n+1}} & =_{\text{algebra}} \\
2 - (\frac{1}{2})^n. &
\end{array}$$

Q.E.D.

Opgave 3. Geef de formele definities van $\Gamma \vdash \varphi$ en $\Gamma \models \varphi$ in termen van valuatie's, bewijzen met bijbehorende conclusie, en open aannamen.

Al deze definitie's zijn op de webpagina te vinden indien wij ze enigszins afwijken van Ls.

$$\Gamma \vdash \varphi \quad := \quad \exists \mathcal{D} \in \mathsf{B} \;\; (\mathcal{A}(\mathcal{D}) \subset \Gamma \text{ en } \mathcal{C}(\mathcal{D}) = \varphi).$$

Even zo bondig:

$$\Gamma \models \varphi \quad := \quad \forall v \in \text{Val} \;\; ([\forall \gamma \in \Gamma v(\gamma) = 1] \Rightarrow v(\varphi) = 1).$$

Opgave 4. Formuleer de eerste onvolledigheidsstelling van Gödel.

Dit staat in de samenvatting van het eerste college:

Voor elk redelijk axiomatisch systeem T dat over de natuurlijke getallen handelt is er een zin φ_T zó dat

$$N \models \varphi_T \quad \text{maar} \;\; T \not\vdash \varphi_T \text{ en } T \not\vdash \neg\varphi_T.$$

Opgave 5. Stel dat $\vdash \psi \to \neg\psi$ en $\vdash \neg\psi \to \psi$ (onze definitie van een paradox in het eerste college). Laat zien dat $\vdash \bot$. (Aanwijzing: als we weten dat $\vdash \psi \to \neg\psi$ hebben we dus een bewijs $\overset{D_0}{\psi \to \neg\psi}$. Dit bewijs mogen we gebruiken om een bewijs voor $\bot$ te maken.)

We moeten dus een bewijs voor $\bot$ maken. Daarbij mogen we als blokjes de bewijzen $\overset{D_0}{\psi \to \neg\psi}$ en $\overset{D_1}{\neg\psi \to \psi}$ gebruiken. Een mogelijkheid is het volgende bewijs. Merk op dat het een constructief bewijs is. Er was ook door iemand een niet constructief bewijs gegeven.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{D_0}{\psi \to \neg\psi} \quad [\psi]_1}{\neg\psi} \to \mathrm{E} \quad [\psi]_1}{\bot} \to \mathrm{E}}{\neg\psi} \to \mathrm{I}_1 \quad \overset{D_1}{\neg\psi \to \psi}}{\psi} \to \mathrm{E} \quad \overset{D_0}{\psi \to \neg\psi}}{\neg\psi} \to \mathrm{E} \quad \overset{D_2}{\psi}}{\bot} \to \mathrm{E}}{}
$$

Waarbij D_2 een "afkorting" is voor de volgende boom:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{D_0}{\psi \to \neg\psi} \quad [\psi]_2}{\neg\psi} \to \mathrm{E} \quad [\psi]_2}{\bot} \to \mathrm{E}}{\neg\psi} \to \mathrm{I}_2 \quad \overset{D_1}{\neg\psi \to \psi}}{\psi} \to \mathrm{E}
$$