Uitwerking van opgaven Logika 2 voor filosofen

Basisdoctoraal, najaar 2001

Week 3

Opgave 1. Bewijs met natuurlijke deductie de volgende opgave(n).

5. $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$.

Het volgende bewijs volstaat:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg B \to \neg A]_1 \quad [\neg B]_3}{\neg A}\to \mathrm{E} \qquad [A]_2}{\bot}\to \mathrm{E}}{B}\,\mathrm{RAA}_3}{A \to B}\to \mathrm{I}_2}{(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)}\to \mathrm{I}_1$$

Opgave 4. Bewijs de volgende uitspra(a)k[en] over onbewijsbaarheid:

3. $\nvdash ((\psi \to \varphi) \to \varphi) \to \varphi$.

We moeten dus laten zien dat $((\psi \to \varphi) \to \varphi) \to \varphi$ niet algemeen afleidbaar is. We vinden dus één instantie van deze formule (merk op dat ψ en φ eigenlijk variabelen zijn voor mogelijke formules) die niet afleidbaar is. We kiezen p_0 als ψ en p_1 als φ. De opdracht is dus nu om te laten zien dat $((p_0 \to p_1) \to p_1) \to p_1$ niet afleidbaar is. Wegens de correctheidsstelling weten we dat
$\vdash ((p_0 \to p_1) \to p_1) \to p_1 \Rightarrow \models ((p_0 \to p_1) \to p_1) \to p_1$. Beschouw nu de valuatie v met $v(p_0) = 1$ en $v(p_1) = 0$. (Voor de andere propositievariabelen maakt het niet uit wat v precies doet!)
We zien dat $v(((p_0 \to p_1) \to p_1) \to p_1) = 0$,dus
$\not\models ((p_0 \to p_1) \to p_1) \to p_1$. En dus wegens de correctheidsstelling
$\nvdash ((\psi \to \varphi) \to \varphi) \to \varphi$.