Uitwerking van opgaven Logika 2 voor filosofen

Basisdoctoraal, najaar 2001
Week 1

Opgave 2. Bewijs met inductie dat voor alle natuurlijke getallen ≥ 1

$$1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Met onze net nieuw aangeleerde notatie zouden wij dus zeggen

Te Bewijzen: $\forall n \in N \ \ \Sigma_{1=0}^{n+1} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
Bewijs: Het bewijs gaat met inductie naar n.

- Basis. $n = 0$. $\Sigma_i = 0^0 i = 0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2}$. Dus dat is goed.
- Inductie. We moeten nu dus laten zien dat $\Sigma_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$ uitgaande van het "feit" dat $\Sigma_{1=0}^{n+1} i = \frac{n(n+1)}{2}$. We weten dat $Sigma_i = 0^{n+1} i =_{\text{def}} \Sigma_{1=0}^{n+1} i + (n+1) =_{\text{IH}} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$. Dus inderdaad, als we extreem links met extreem rechts vergelijken zien we dat $\Sigma_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$. QED.

Opgave 3. Het volgende inductie axioma is niet correct voor de structuur van de natuurlijke getallen.

$$\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(2x) \rightarrow \varphi(2x+2)) \wedge \forall x(\varphi(2x+1) \rightarrow \varphi(2x+3)) \rightarrow \forall x \varphi(x).$$

Geef een formule $\varphi(x)$ waaruit dit blijkt. Hoe kan het axioma door één simpele toevoeging gerepareerd worden?

Als we definieren $\varphi(x) := \exists y \, 2 \cdot y = x$ (x is een even getal) dan zien we dat $N \models \varphi(0)$ en ook $N \models \forall x(\varphi(2x) \rightarrow \varphi(2x+2))$ en ook $N \models \forall x(\varphi(2x+1) \rightarrow \varphi(2x+3))$ maar niet $N \models \forall x \varphi(x)$. Een inductie axioma dat wel algemeen geldig is, is het volgende

$$\varphi(0) \wedge \varphi(1) \wedge \forall x(\varphi(2x) \rightarrow \varphi(2x+2)) \wedge \forall x(\varphi(2x+1) \rightarrow \varphi(2x+3)) \rightarrow \forall x \varphi(x).$$

Opgave 6. Zijn de volgende uitspraken correct?

- $((p \to q) \to p) \models p$
- $((q \to p) \to p) \models p$

Geef de redenering goed weer.

Het is hier de bedoeling om echt goed met onze definitie te werken. $\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow$ [voor alle valuatie'sf $((\forall \gamma \in \Gamma f(\gamma) = 1) \to f(\varphi) = 1)$].