Opgaven Logika 2 voor filosofen

Basisdoctoraal, najaar 2001

Week 1

Opgave 1. Bewijs met inductie dat

$$(1 - \frac{1}{2}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$$

voor alle natuurlijke getallen groter dan 1 geldig is.

Opgave 2. Bewijs met inductie dat voor alle natuurlijke getallen ≥ 1

$$1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Opgave 3. Het volgende inductie axioma is niet correct voor de structuur van de natuurlijke getallen.

$$\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(2x) \to \varphi(2x+2)) \wedge \forall x(\varphi(2x+1) \to \varphi(2x+3)) \to \forall x \varphi x.$$

Geef een formule $\varphi(x)$ waaruit dit blijkt. Hoe kan het axioma door één simpele toevoeging gerepareerd worden?

Opgave 4. We gooien n keer met een eerlijke dobbelsteen en beschouwen de som van het totaal aantal gegooide ogen. Bewijs m.b.v. natuurlijke inductie dat de kans dat deze som een even getal is gelijk is aan een half.

Opgave 5. Hier volgt een bewijs van het feit dat alle mensen dezelfde lengte hebben. Het bewijs gaat met inductie naar het aantal mensen. Beschouw het basisgeval, i.e., er is één persoon P_0. Uiteraard is deze persoon even lang als zichzelf. Nu komt de inductiestap. Beschouw dus $n+1$ personen, $P_0, \ldots, P_n$. Zonder van dit groepje de eerste n af, m.a.w. beschouw $P_0, \ldots, P_{n-1}$. Volgens de inductiehypothese zijn al deze mensen even lang. Beschouw nu $P_1, \ldots, P_n$. Wederom volgens de inductiehypothese zijn al deze mensen even lang. Wegens de transitiviteit van "even lang zijn" ($xEy \wedge yEz \to xEz$) hebben we nu dat alle $P_0, \ldots, P_n$ even lang zijn. Wat gaat hier mis?

Opgave 6. Zijn de volgende uitspraken correct?

- $((p \to q) \to p) \models p$
- $((q \to p) \to p) \models p$

Geef de redenering goed weer.

Opgave 7.

1. Hoeveel verschillende niet equivalente formules zijn er te maken met slechts p en q als (verschillende) propositieletters?
2. Definieer inductief de verzameling I die bestaat uit alle mogelijke propositionele formules die slechts zijn opgebouwd uit p, q en $\to$.
3. Bewijs dat I oneindig veel formules bevat.
4. Geef zes niet-equivalente formules in I.
5. Bewijs met behulp van inductie dat er niet meer dan zes niet-equivalente formules in I aanwezig zijn.

Opgave 8. Hoe kan Tarski's stelling over de niet definieerbaarheid van een waarheidspredikaat überhaupt worden geformuleerd als de formulering van de stelling zelf gebruik maakt van het waarheidsbegrip?