Opgaven Logika 2 voor filosofen

Basisdoctoraal, najaar 2001

Week 6

Opgave 0. Geef een zin φ in de taal $\{+, \cdot, 1, 0\}$ zó dat $\mathsf{FV}(\varphi) = \mathsf{BV}(\varphi) = \{x_{612}\}$.

Opgave 1. Zij L de taal $\{+, \cdot, 1, 0\}$ en N de structuur van de natuurlijke getallen. Geef drie verschillende termen van L die allemaal als het getal 10 worden geïnterpreteerd onder de standaard interpretatie. Welke term gebruikt het minst aantal symbolen. Laat zien dat er oneindig veel verschillende termen zijn die het getal 0 weergeven.

Opgave 2. Zij Γ de volgende (schematische) zinsverzameling

$$\Gamma \;:=\; \{\varphi, \varphi \to \psi\}.$$

Geef een instantiatie van Γ zó dat Γ consistent is. Geef ook een instantiatie van Γ zó dat Γ inconsistent is.

Opgave 3. Geef in de volgende zinnen aan of $(x_2 + x_1)^2$ vrij is voor x_0.

1. $\forall x_3 R(x_1, x_0, x_3) \wedge (x_0 = 6 \to \exists x_2 P(x_2))$
2. $\exists x_0 R(x_0, x_0, x_0)$
3. $x_0 = (x_2 + x_1)^2 \to \exists x_3 \forall x_1 R(x_0, x_1, x_3)$
4. $R(x_0, x_1, x_2) \to \forall x_0 \exists x_1 \exists x_2 R(x_0, x_1, x_{612})$

Opgave 4. Bewijs met behulp van natuurlijke deductie de volgende uitspraken.

1. $\vdash \forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\forall x \varphi(x) \to \forall x \psi(x))$
2. $\vdash \forall x \varphi(x) \to \neg \forall x \neg \varphi(x)$
3. $\vdash \exists \varphi(x) \wedge \psi \to \exists x(\varphi(x) \wedge \psi) \qquad x \notin \mathsf{FV}(\psi)$
4. $\vdash \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \to \exists x(A(x) \vee B(x))$

5. $\vdash \forall x(\varphi(x) \vee \psi) \to \forall x\varphi(x) \vee \psi \quad x \notin \mathsf{FV}(\psi)$
6. $\vdash (\forall x\varphi(x) \vee \psi) \to \forall x(\varphi(x) \vee \psi) \quad x \notin \mathsf{FV}(\psi)$
7. $\vdash \forall x\varphi(x) \to \neg\exists x\neg\varphi(x)$
8. $\vdash \exists x\neg\varphi(x) \to \neg\forall x\varphi(x)$
9. $\vdash \forall x\varphi(x) \to \exists x\neg\varphi(x)$

Opgave 5. Bewijs dat

$$\forall \mathcal{A}[\mathcal{A} \models \varphi \Rightarrow \mathcal{A} \models \psi] \Rightarrow [\models \varphi \Rightarrow \models \psi].$$

Laat ook zien dat de implicatie de andere kant op niet geldig is.

Opgave 6. Laat zien dat de volgende uitspraken niet afleidbaar zijn.

1. $\exists x A(x) \to \forall x A(x)$
2. $\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \to (\forall x\varphi(x) \vee \forall x\psi(x))$
3. $\exists x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\exists x\varphi(x) \to \exists\psi(x))$
4. $\exists x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\forall x\varphi(x) \to \forall x\psi(x))$

Geef precies aan waar je de volledigheidsstelling aanroept.