Opgaven Logika 2 voor filosofen

Basisdoctoraal, najaar 2001

Week 5

Opgave 1. Zij Γ een maximaal consistente zinsverzameling. Bewijs de volgende uitspraken:

- $(\varphi \to \psi) \in \Gamma \Leftrightarrow$ Als $\varphi \in \Gamma$ dan $\psi \in \Gamma$.
- $\neg\varphi \in \Gamma \Leftrightarrow \varphi \notin \Gamma$

Opgave 2.

- Bewijs dat $\{\varphi_1, \varphi_2\} \vdash \chi$ equivalent is aan $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \vdash \chi$.
- Zijn gegeven de volgende zinnen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$.
Bewijs dat voor alle $n \in N$ $\{\varphi_i \mid i \leq n\} \vdash \chi$ equivalent is aan
$\bigwedge_{i=0}^{n} \varphi_i \vdash \chi$.

Opgave 3. Laat Γ een oneindige zinsverzamling zijn met $\Gamma = \{\gamma_i \mid i \in N\}$ voor zekere formules γ_i, $i \in N$. Bewijs dat $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \exists n \in N \quad \bigwedge_{i=0}^{n} \gamma_i \vdash \varphi$.

Opgave 4. [Compactheidsstelling] Bewijs dat als $\Gamma \models \varphi$, dan is er een eindige deelverzameling Δ van Γ zó dat $\Delta \models \varphi$.

Opgave 5. Geef een zin φ in de taal $\{+, \cdot, 1, 0\}$ zó dat
$\mathsf{FV}(\varphi) = \mathsf{BV}(\varphi) = \{x_{612}\}$.

Opgave 6. Zij L de taal $\{+, \cdot, 1, 0\}$ en N de structuur van de natuurlijke getallen. Geef drie verschillende termen van L die allemaal als het getal 10 worden geïnterpreteerd onder de standaard interpretatie. Welke term gebruikt het minst aantal symbolen. Laat zien dat er oneindig veel verschillende termen zijn die het getal 0 weergeven.

Opgave 7. Geef Kripke modellen om te laten zien dat de volgende formules niet afleidbaar zijn in intuitionistische logica.

1. $A \vee \neg A$
2. $\neg\neg A \to A$
3. $\neg A \vee \neg\neg A$
4. $\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$
5. $(A \to B) \vee (B \to A)$
6. $(\neg A \to (B \vee C)) \to ((\neg A \to B) \vee (\neg A \to C))$
7. $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$
8. $((\psi \to \varphi) \to \varphi) \to \varphi$
9. $(\neg\neg\varphi \to \varphi) \to (\varphi \vee \neg\varphi)$