Opgaven Logika 2 voor filosofen

Basisdoctoraal, najaar 2001

Week 3

Opgave 1. Bewijs met natuurlijke deductie de volgende opgaven.

1. $\vdash A \to (B \to A)$
2. $\vdash A \to (\neg A \to B)$
3. $\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
4. $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
5. $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

Opgave 2. Bewijs met natuurlijke deductie:

$$\vdash ((A_0 \vee A_1) \wedge \neg A_0) \to A_1.$$

Bewijs met inductie dat

$$\forall n \in N \quad \vdash ((\bigvee_{i=0}^{n+1} A_i) \wedge \bigwedge_{i=0}^{n} \neg A_i) \to A_{n+1}.$$

Opgave 3. Laat zien dat $\Gamma \vdash \varphi \to \psi \quad \Rightarrow \Gamma \models \varphi \to \psi$ indien $\Gamma, \varphi \vdash \psi \quad \Rightarrow \Gamma, \varphi \models \psi$. (Aanwijzing: schrijf precies onze definitie van $\Sigma \models \chi$ op en gebruik de deductiestelling, i.e., $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ desda $\Gamma, \varphi \vdash \psi$.)

Opgave 4. Bewijs de volgende uitspraken over onbewijsbaarheid:

1. $(A \to B) \nvdash (A \wedge B)$,
2. $\nvdash (p \vee q) \wedge r \to p$,
3. $\nvdash ((\psi \to \varphi) \to \varphi) \to \varphi$.

Geef in alle gevallen in de redenering precies aan waar de correctheidsstelling wordt aangeroepen.

Opgave 5. Bekijk welke van de volgende verzamelingen consistent zijn:

1. $\{(\neg p_1 \wedge p_2) \to p_0, p_1 \to (\neg p_1 \to p_2), p_0 \to \neg p_2, \neg p_2 \to p_0\}$,
2. $\{p_0 \to p_1, p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, p_3 \to \neg p_0\}$,
3. $\{p_0 \to p_1, p_0 \wedge p_2 \to p_1 \wedge p_3, p_0 \wedge p_2 \wedge p_4 \to p_1 \wedge p_3 \wedge p_5, p_0 \wedge p_2 \wedge p_4 \wedge p_6 \to p_1 \wedge p_3 \wedge p_5 \wedge p_7, \ldots\}$. Kun je een goede definitie geven van deze laatste verzameling zinnen zonder dat de puntjes ... worden gebruikt?

Opgave 6. Laat zien dat de volgende uitspraken equivalent zijn.

A $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ is consistent.

B $\nvdash \neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$.

C $\nvdash (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1}) \to \neg\varphi_n$.

Opgave 7. Een formule φ heet *onafhankelijk* van Γ indien $\Gamma \nvdash \varphi$ en $\Gamma \nvdash \neg\varphi$. Laat zien dat $p_1 \to p_2$ onafhankelijk is van
$\{p_1 \to (p_0 \wedge \neg p_2), (p_0 \wedge \neg p_2) \to p_1, p_2 \to p_0\}$.
Hoe kunnen we de eerste onvolledigheidsstelling van Gödel herformuleren in termen van onafhankelijkheid? Kan volgens de eerste onvolledigheidsstelling van Gödel er een "redelijk systeem bestaan" dat volledig is t.o.v. de structuur van de natuurlijke getallen?

Opgave 8. Wat gebeurt er als Pinokkio de volgende zin uitspreekt

"Terwijl ik deze zin uitspreek is mijn neus aan het groeien"

1. Er komt steeds meer rook uit zijn oren totdat hij uiteindelijk uit elkaar spat.
2. Er beginnen andere lichaamsdelen te groeien.
3. Het goede antwoord bevindt zich niet onder de gegeven keuzemogelijkheden.