Opgaven Logika 2 voor filosofen

Basisdoctoraal, najaar 2001

Week 2

Opgave 0. Bewijs de ongelijkheid van Bernoulli (één van de velen)

$$\forall n \in N \forall x > -1 (\in R) \quad (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Opgave 1. We bekijken het volgende spel. Er zijn twee spelers, W en Z. In de beginsituatie is er een rijtje van bolletjes gegeven. Elk bolletje is zwart of wit. Een zet bestaat eruit dat een speler naast elkaar liggende bolletjes wegpakt en er één bolletje voor in de plaats terug legt. De mogelijke zetten zijn:

$$\bullet\circ \to \bullet, \quad \circ\bullet \to \bullet, \quad \bullet\bullet \to \circ, \quad \circ\circ \to \circ.$$

Speler W begint. Hij heeft het spel gewonnen als er aan het eind een witte steen blijft liggen. In het andere geval wint speler Z.

- Definieer inductief de verzameling van beginsituatie's.
- Bewijs met inductie op de lengte van het beginrijtje dat ofwel speler Z ofwel speler W een winnende strategie heeft.
- Formuleer een voldoende en noodzakelijke voorwaarde voor speler W om te (kunnen) winnen. Bewijs de correctheid hiervan. (Hint: kijk naar de pariteit van het aantal zwarte stenen.)

Opgave 2. Bewijs (met inductie?) dat als twee valuatie's f en g dezelfde bedeling induceren, dat zij dan gelijk zijn, i.e. $\forall \varphi \in \mathrm{Prop} \;\; f(\varphi) = g(\varphi)$.

Opgave 3. Geef voor de volgende twee formules een bijbehorende conjunctieve normaalvorm en een bijbehorende disjunctieve normaalvorm.
$(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$, $\neg(p \to q) \vee q$. Zijn deze normaalvormen uniek?

Opgave 4. We definieren voor alle natuurlijke getallen n twee functie's $f_n : \mathrm{Prop} \to \mathrm{Prop}$ en $g_n : \mathrm{Prop} \to \mathrm{Prop}$ als volgt.

$$f_0(\varphi) := \varphi \text{ en } f_{n+1}(\varphi) = \neg(f_n(\varphi)),$$

en

$$g_0(\varphi) := \varphi \text{ en } g_{n+1}(\varphi) = g_n(\neg\varphi),$$

Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n geldt: $\models g_n(\varphi) \leftrightarrow f_n(\varphi)$.

Opgave 5.

- Definieer inductief de verzameling E van formules waar alleen de connectieven $\neg$ en $\wedge$ in voorkomen.
- Laat zien dat $\forall\varphi \in \text{Prop} \;\; \exists\psi \in E$ zodanig dat $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

Opgave 6. Bewijs met natuurlijke deductie de volgende opgaven.

1. $\vdash \neg(\psi \wedge \neg\psi)$
2. $(\phi \to \psi) \vdash (\neg(\phi \wedge \neg\psi))$
3. $\vdash (\neg(\phi \wedge \neg\psi)) \to (\phi \to \psi)$
4. $\vdash \phi \to (\psi \to (\psi \wedge \phi))$
5. $\psi \vdash (\phi \to (\psi \wedge \phi))$
6. $\vdash \psi \to \psi$
7. $\bot \to \psi$
8. $\neg\varphi \vee \varphi$

Opgave 7. Stel dat $\vdash \psi \to \neg\psi$ en $\vdash \neg\psi \to \psi$, (onze definitie van een paradox in het eerste college) laat zien dat $\vdash \bot$.

Opgave 8. Bewijs met natuurlijke deductie:

$$(A \to (B \wedge C)) \vdash ((A \to B) \wedge (A \to C)).$$

Laat ook zien dat

$$(A \to (B \wedge C)) \models ((A \to B) \wedge (A \to C)).$$

Bewijs met inductie dat

$$\vdash (A \to (B_0 \wedge \ldots \wedge B_n)) \to ((A \to B_0) \wedge \ldots \wedge (A \to B_n)).$$