Logika 2 voor filosofen

Basisdoctoraal, najaar 2001

Oefententamen

Opgave 1. Bewijs met natuurlijke deductie de volgende uitspraken:

1. $\vdash \neg A \vee \neg B \to \neg(A \wedge B)$
2. $\vdash \neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$
3. $\vdash (\neg A \to (B \vee C)) \to ((\neg A \to B) \vee (\neg A \to C))$

Geef aan of het gegeven bewijs een constructief bewijs is of niet.
Laat zien dat $A \vee B \to A$ niet afleidbaar is. Is het wel constructief afleidbaar?

Opgave 2. Bewijs met natuurlijke deductie de volgende uitspraken:

1. $\vdash \forall x(A(x) \to B) \to (\exists x A(x) \to B)$ Met $x \notin \mathsf{FV}(B)$.
2. $\vdash \neg\forall x\varphi(x) \to \exists x\neg\varphi(x)$
3. $\vdash \forall y\forall x\varphi(x,y) \to \forall x\varphi(x,x)$

Geef aan of het gegeven bewijs een constructief bewijs is of niet.
Laat zien dat
$\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \to (\forall x\varphi(x) \vee \forall x\psi(x))$ niet afleidbaar is. Is het wel constructief afleidbaar?

Opgave 3. Geef een constructief bewijs van $\neg\neg(A \vee \neg A)$ en laat zien dat $A \vee \neg A$ niet constructief afleidbaar is. Laat tevens zien dat $((p \to q) \to p) \to p$ niet constructief afleidbaar is.

Opgave 4. Zij D_0 het volgende bewijs:

$$\dfrac{\begin{matrix} \\ D_1 \\ A \vee B \end{matrix} \quad \begin{matrix} [A]_1 \\ D_2 \\ C \end{matrix} \quad \begin{matrix} [B]_2 \\ D_3 \\ C \end{matrix}}{C} \vee E_{1,2}.$$

Bewijs dat
$\mathcal{A}(D_0) \models \mathcal{C}(D_0)$.

Je mag hierbij de volgende " feiten" gebruiken:
$\mathcal{A}(D_1) \models \mathcal{C}(D_1)$,
$\mathcal{A}(D_2) \models \mathcal{C}(D_2)$ en
$\mathcal{A}(D_3) \models \mathcal{C}(D_3)$.
Dit is dus een stap uit het inductieve bewijs van de correctheid van de propositielogica.

Opgave 5. Een formule φ heet *onafhankelijk* van Γ indien $\Gamma \not\vdash \varphi$ en $\Gamma \not\vdash \neg\varphi$.

a. Laat zien dat $p_1 \to p_2$ onafhankelijk is van
$\{p_1 \to (p_0 \wedge \neg p_2), (p_0 \wedge \neg p_2) \to p_1, p_2 \to p_0\}$.

b. Hoe kunnen we de eerste onvolledigheidsstelling van Gödel herformuleren in termen van onafhankelijkheid?

c. Kan volgens de eerste onvolledigheidsstelling van Gödel er een "redelijk systeem bestaan" dat volledig is t.o.v. de structuur van de natuurlijke getallen?

d. Formuleer de stelling van Tarski over de ondefinieerbaarheid van het waarheidspredicaat.

Opgave 6.

a. Geef voor de volgende twee formules een bijbehorende conjunctieve normaalvorm en een bijbehorende disjunctieve normaalvorm.
$(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$, $\neg(p \to q) \vee q$.

b. Bewijs met inductie dat voor elk natuurlijk getal groter dan 0 geldt

$$\Sigma_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

(Aanwijzing 1: gebruik dat $2k - 1 = k^2 - (k-1)^2$ of niet.)
(Aanwijzing 2: gebruik dat $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ of niet.)