

Oefenmateriaal Wiskunde

Oefenmateriaal bij de
Opfriscursus wiskunde (2004–2005)
Voor de Bachelor Opleiding Cognitieve Kunstmatige
Intelligentie

Eerste les, uitwerkingen en aanwijzingen

Materiaal: Prof. Dr. H.J.M. Bos
Docent: Joost J. Joosten

September 2004

Algemene aanwijzingen

Deze collectie antwoorden op de opgaven is bedoeld om je te helpen met het opnieuw maken van de opgaven die je in de eerste ronde niet goed had gemaakt. Begin daarbij met de opgaven die fout waren en waarvan je toch ‘zeker’ of ‘voldoende zeker’ was (aangegeven met ‘FZ’ en ‘FVZ’ op het blad met de uitslag). Doe daarna de opgaven gemerkt met ‘F’ (dat betekent dat het antwoord onjuist was en dat je ‘Onzeker’ had aangegeven) en de opgaven die je niet gemaakt had. Doe tenslotte de opgaven waarbij aangegeven staat ‘ONV’, wat betekent dat het antwoord onvolledig was.

Doe al deze onderdelen opnieuw en lever een duidelijke uitwerking op papier in (dus niet alleen het goede antwoord). Gebruik de lijst antwoorden om te zien of je antwoord goed is, kijk ook naar de aanwijzingen die bij sommige onderdelen in de lijst staan.

De regels voor logaritmen, trigonometrische functies (sin, cos, tan) en dergelijke staan in het boek van Kreyszig op bladzijden A51 en volgende (achterin, bij de Appendices). Helaas staan daar de regels voor breuken niet bij (daar doen we nog wat aan). Voor de eerste-jaars wiskunde moet je de nummers (1) t/m (5) en (15) [JBS] uit je hoofd kennen. Het zou mooi zijn als je ook de nummers (6), (7), (9) en (10) uit je hoofd kende, of desgewenst zou kunnen afleiden, maar daar zullen we het bij de toets niet op aan laten komen.

Er komt nog een serie nieuwe opgaven die op dezelfde manier behandeld moeten worden als die in de eerste ronde.

En verder:

1. Laat eenvoudige uitdrukkingen zoals $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2^6 , $\ln 9$, $\ln \pi$ en $\sqrt[4]{\pi + 1}$ in je antwoorden staan, je hoeft die niet op de rekenmachine uit te rekenen, want aan die getallen kun je heel weinig zien.
2. Het is vaak lastig te voorzien of het nog zin heeft een antwoord verder te vereenvoudigen. Maar toch: geef niet te gauw op.
3. Bij de opgaven 4 t/m 6: Als het goede antwoord “Goed” is, geef dan aan welke regel je gebruikt; als het goede antwoord “Fout” is, geef dan twee voorbeelden waaruit duidelijk blijkt dat de gelijkheid niet klopt; zulke voorbeelden kun je vinden door getallen voor a en b te kiezen.
4. Bij grafieken: Geef langs de assen waarden aan, zeker als de grafiek de as snijdt. Beperk je niet tot de positieve X -en Y -assen. Maak een *nette* tekening. Als je een grafiekenopgave fout of niet gemaakt hebt, lever dan een nieuwe schets in (ondanks het feit dat de grafieken in deze antwoorden bundel opgenomen zijn).

Opgave 1.

	Antwoord:
Bereken: a) $(1 + \sqrt{3})^2$	$4 + 2\sqrt{3}$
Schrijf zonder haakjes: b) $(a + b)^2$ c) $(a + b)^4$ d) $(a - b)(a + b)$	$a^2 + 2ab + b^2$ $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ $a^2 - b^2$
Schrijf zonder breukstreep: e) $\frac{\pi^2 - a^2}{\pi - a}$ f) $\frac{a^4 + a^3 - a^2 - a}{a + 1}$ g) $\frac{(7 + \pi - a)^2 - (7 + a - \pi)^2}{\pi - a}$	$\pi + a$ $a^3 - a$ 28
Vul in: h) $b^2 + bc + c^2 = (b + \dots)^2 + \frac{3}{4}c^2$	$\frac{c}{2}$ of $-2b - \frac{c}{2}$ (een is genoeg, beide zijn goed)
Schrijf zo eenvoudig mogelijk: b) $\log(47 + \sqrt{47^2 - 1}) + \log(47 - \sqrt{47^2 - 1})$	0

Aanwijzingen:

b), c), d): Als je de regels ('merkwaardige producten') niet weet, gewoon uitvermenigvuldigen, dus bijvoorbeeld $(a + b)^4 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b) = (a^2 + ab + ba + b^2)(a + b)(a + b)$ enzovoort totdat de haakjes weg zijn en alle overeenkomstige termen netjes bij elkaar gevoegd zijn.

e), f), g): Probeer de teller in een andere vorm te schrijven, bijvoorbeeld door haakjes weg te werken, of juist door te herschrijven als product van factoren die tussen haakjes staan; als je geluk hebt zie je dan hoe de deling uitgevoerd kan worden.

e): Natuurlijk $(\pi^2 - a^2)(\pi - a)^{-1}$ wiskundig goed, maar als oplossing flauw en zeker niet eenvoudiger. opgeschreven.

i): Gebruik de regel $\log a + \log b = \log ab$.

Opgave 2.

Schrijf de volgende uitdrukkingen eenvoudiger:

	Antwoord:
a) 1^1	1
b) 6^0	1
c) π^0	1
d) 1^0	1
e) 0^1	0
f) $5^2 5^{-3}$	$\frac{1}{5}$
g) $8^{-3} 4^{5/2}$	$\frac{1}{16}$
h) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 3^2$	$\frac{1}{3}$
i) $x^{-3} x^2$	$\frac{1}{x}$
j) $(x^4)^{1/2}$	x^2
k) $(x^{1/a} y)^{-a}$	$\frac{1}{xy^a}$
l) $(4^3)^2, 4^{(3^2)}$	$4^6, 4^9$

Aanwijzingen:

g): Schrijf 4 en 8 als machten van 2.

Opgave 3.

Schrijf de volgende uitdrukkingen eenvoudiger. Let op: sommige kunnen niet eenvoudiger geschreven worden; antwoord daar 'kan niet.'

	Antwoord:
a) 3^3	27
b) π^π	kan niet eenvoudiger
c) $\ln(10) + \ln 5$	$\ln(50)$
d) $e^{x \ln 5}$	5^x
e) $2 \ln \pi$	$\ln(\pi)^2$ (veel eenvoudiger is het niet)
f) $(\ln 3)^2$	kan niet eenvoudiger
g) $\ln(3^2)$	$2 \ln 3$ of $\ln 9$
h) $\ln(x + \pi) + \ln(x - \pi)$	$\ln(x^2 - \pi^2)$

Aanwijzingen:

d): Schrijf $x \ln 5$ als $(\ln 5) \times x$

Opgave 4.

In een boekje met rekenregels heb ik elf regels voor rekenen met machten gevonden. De eerste was

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s},$$

de rest is door elkaar geraakt. Ik weet alleen dat de de volgende uitdrukkingen links van het gelijkteken voorkwamen:

$$(a \cdot b)^r, \sqrt[r]{a}, \sqrt[s]{a^r}, \frac{d}{dx}a^x, \left(\frac{a}{b}\right)^r, a^0, a^{-r}, \frac{a^r}{a^s}, \frac{d}{dx}x^a, (a^r)^s;$$

en de volgende uitdrukkingen rechts (**NB** in de oorspronkelijke opgave was deze lijst ook nog niet goed, nu wel):

$$a^{r \cdot s}, \frac{a^r}{b^r}, 1, a^x \cdot \ln a, a \cdot x^{a-1}, a^{r-s}, \frac{1}{a^r}, a^{\frac{1}{r}}, a^{\frac{x}{s}}, a^r \cdot b^2.$$

Maar de goede volgorde van die uitdrukkingen ben ik kwijt.

Herstel de oorspronkelijke lijst hieronder; zet ze ook in een overzichtelijke volgorde. Controleer je antwoorden door voor a , b , r en s getallen in te vullen:

$$\begin{aligned} a^r \cdot a^s &= a^{r+s} \\ \frac{a^r}{a^s} &= a^{r-s} \\ (a^r)^s &= a^{r \cdot s} \\ (a \cdot b)^r &= a^r \cdot b^r \\ \left(\frac{a}{b}\right)^r &= \frac{a^r}{b^r} \\ a^0 &= 1 \\ a^{-r} &= \frac{1}{a^r} \\ \sqrt[r]{a} &= a^{\frac{1}{r}} \\ \sqrt[s]{a^r} &= a^{\frac{r}{s}} \\ \frac{d}{dx}x^a &= a \cdot x^{a-1} \\ \frac{d}{dx}a^x &= a^x \cdot \ln a \end{aligned}$$

Opgave 5.

Zelfde opgave als de voorgaande bij een lijst van acht rekenregels over logaritmen (\log) en natuurlijke logaritmen.

Uitdrukkingen links van het gelijkteken:

$$\log\left(\frac{a}{b}\right), \ln e, \ln(a^r), \log 10, \log(a \cdot b), \log(a^r), \ln(a \cdot b), \ln\left(\frac{a}{b}\right),$$

Uitdrukkingen rechts:

$$1, r \cdot \ln a, 1, r \cdot \log a, \log a + \log b, \log a - \log b, \ln a + \ln b, \ln a - \ln b,$$

Bedenk dat

$$y = \log x \iff x = 10^y$$

en

$$y = \ln x \iff x = e^y.$$

$$\begin{aligned}\log 10 &= 1 \\ \log(a \cdot b) &= \log a + \log b \\ \log\left(\frac{a}{b}\right) &= \log a - \log b, \\ \log(a^r) &= r \cdot \log a \\ \ln e &= 1 \\ \ln(a \cdot b) &= \ln a + \ln b \\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln a - \ln b \\ \ln(a^r) &= r \cdot \ln a\end{aligned}$$

Opgave 6.

Maak uit de hand een schets van de grafieken van de volgende functies:

Functie	Grafiek:
a) $x \mapsto 5 - x$	[Grafieken ontbreken]
b) $x \mapsto \frac{1}{2}$	
c) $x \mapsto \sqrt{5 - x}$	
d) $x \mapsto 5 - x^2$	[Grafieken ontbreken]
e) $x \mapsto \frac{1}{x+1}$	
f) $x \mapsto \sqrt{x^2}$	

Opgave 7.

A) Schets de grafieken van:

Functie	Grafiek:
a) $t \mapsto \sin t$	[Grafieken ontbreken]
b) $t \mapsto \cos t$	
c) $t \mapsto \cos 5t$	

B) Lees uit de grafieken af welke van de volgende gelijkheden juist zijn voor alle t :

Gelijkheid	Antwoord: Juist/Onjuist
d) $\sin(-t) = -\sin t$	Juist
e) $\cos(-t) = \cos t$	Juist
f) $\sin(\pi/2 - t) = \cos t$	Juist
g) $\cos(\pi/2 - t) = \sin t$	Juist

Opgave 8.

Aan te vullen tabel. De volledige tabel met de exacte waarden staat hieronder. Bedenk bij het controleren van de antwoorden dat:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{3}{2\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\end{aligned}$$

(Ga ook na of je begrijpt waarom het bovenstaande juist is.)

x	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	-1	0
$\cos x$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	-1	0	1
$\tan x$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	\times	$-\sqrt{3}$	-1	0	\times	0

(Met \times wordt *niet gedefinieerd* aangegeven.)

Aanwijzingen:

Herinner je dat $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Opgave 9.

Bepaal voor elk van de volgende vergelijkingen alle reële getallen x die eraan voldoen.

Vergelijking	Antwoord:
a) $1 - x = 2 + x$	$x = -\frac{1}{2}$
b) $x^2 + 3x + 1 = 0$	$-\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$
c) $x + 1 = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$
d) $1 - x = \sqrt{1 - 2x + x^2}$	$x \leq 1$
e) $\frac{1}{\sqrt{x-1}} = 5$	$x = \frac{26}{25}$

Aanwijzingen:

c): Start door de breuk weg te werken.

d): Start met een aantal waarden voor x in te vullen en zie wat er gebeurt.

Opgave 10.

Bepaal voor elk van de volgende vergelijkingen alle reële getallen q die eraan voldoen.

Vergelijking	Antwoord:
a) $q^4 - 1 = \pi$	$\pm \sqrt[4]{\pi + 1}$
b) $q^4 - 1 = -\pi$	geen reële oplossingen
c) $\frac{1}{q+1} = x$	$\frac{1-x}{x}$ (als $x \neq 0$)
d) $\frac{144}{(q-2)^2} = 169$	$\frac{14}{13}$ en $\frac{38}{13}$
e) $2yq + 1 = q^2$	$y \pm \sqrt{1 + y^2}$
f) $\frac{q-\frac{1}{q}}{2} = y$	$y \pm \sqrt{1 + y^2}$
g) $e^q = \pi$	$\ln \pi$
h) $\pi + e^q = 3$	geen reële oplossing
i) $e^{2q} + 1 = 2e^q$	0
j) $(e^q - e^{-q})^2 + 4 = (e^q + e^{-q})^2$	q kan elk reëel getal zijn

Aanwijzingen:

Let op dat q gevraagd wordt, alle andere letters (x, y, e, π) behandel je dus als gegeven; die mogen in het antwoord blijven staan.

Let ook op dat je geen wortels uit negatieve getallen trekt; ook logaritmen kun je niet van negatieve getallen nemen.

h), i), j): Bereken eerst de waarde van e^q .

Opgave 11.

Differentieer de volgende functies:

Functie	Afgeleide functie:
a) $a(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha+1}$	$\frac{1}{(\alpha+1)^2}$
b) $b(\beta) = \frac{\beta}{\beta^2+1}$	$\frac{1-\beta^2}{(\beta^2+1)^2}$
c) $c(\gamma) = \frac{\gamma}{\alpha^2+1}$	$\frac{1}{\alpha^2+1}$
d) $d(\delta) = e^{\cos \delta}$	$-e^{\cos \delta} \sin \delta$
e) $f(\varphi) = \cos(\varphi + \sin \varphi)$	$-(1 + \cos \varphi) \sin(\varphi + \sin \varphi)$
f) $g(t) = a^{t^2}$	$2ta^{t^2} \ln a$
g) $h(a) = a^{t^2}$	$t^2 a^{t^2-1}$
h) $i(y) = e^{e^y}$	$e^{e^y} + e^y + y$

Aanwijzingen:

Als je een functie van α moet differentiëren, dan betekent dat dat je “naar α ” differentieert, en dus alle andere letters in de formule als constanten beschouwt.