

Oefenmateriaal Wiskunde

Oefenmateriaal bij de
Opfriscursus wiskunde (2004–2005)
Voor de Bachelor Opleiding Cognitieve Kunstmatige
Intelligentie

Eerste les

Materiaal: Prof. Dr. H.J.M. Bos
Docent: Joost J. Joosten

September 2004

Naam:

Studentnummer:

Email:

Aantal uren hieraan besteed:

1 Inleiding

Dit oefenmateriaal¹ is bedoeld voor eerstejaars studenten CKI, die hun basisvaardigheden in de wiskunde willen verbeteren. Het wordt gebruikt in een oefenprogramma dat gedurende de eerste twee weken van September wordt aangeboden. Deelname is vrijwillig.

Het materiaal bestaat uit twee delen. Het eerste deel is vooral om na te gaan waar de zwakke plekken in je vaardigheden zitten. Het tweede deel is training.

De totale tijdsbesteding is minimaal 16 uur, probeer er ook niet te veel meer tijd aan te besteden.

Werkwijze

- **Tijdspad** Op de webpagina van de docent kun je zien welk onderdeel op welk moment zal worden behandeld.
- **Tijdsbesteding** Houd bij hoeveel uren je werkt. Werk niet te lang achter elkaar. Sla een (onderdeel van een) opgave over als je er meer dan een kwartier aan gesleuteld hebt zonder essentieel verder te komen. In de eerste ronde wordt gevraagd bij ieder onderdeel op te geven hoe zeker je van het antwoord bent en waar de eventuele moeilijkheden zitten. Besteed daar gedegen aandacht aan en vermijd antwoorden zoals “ik wist het niet,” daar heb je namelijk zelf niets aan, en je docent heeft daar ook weinig aan om te begrijpen waar de moeilijkheden zitten.
- **Hulp** van familie en vrienden kan nuttig zijn maar vraag het pas als je precies hebt nagegaan waar je probleem zit.

¹Bij de samenstelling van het materiaal is ook gebruik gemaakt van een bundel oefenopgaven opgesteld door Dr. R.W. Bruggeman, van het Mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht.

2 De opgaven

Werk de opgaven uit op eigen papier en bewaar die papieren. Vul op de aangegeven plaatsen in deze bundel alleen de uitkomsten in. Geef ook aan hoe zeker je van het antwoord bent. Doe dat door op de aangegeven plaats in te vullen Z, VZ, of NZ, als volgt:

- Z: Zeker van het antwoord,
- VZ: Voldoende zeker van het antwoord (bij een tentamen zou je met het antwoord verder rekenen),
- NZ: Niet zeker van het antwoord, of geen antwoord gevonden.

Voor alle gevallen waar je VZ of NZ hebt ingevuld, schrijf je, onderaan de opgave, op waar je niet zeker van bent en/of waarom je geen antwoord hebt kunnen vinden (gebruik de achterzijde van het papier als er niet genoeg ruimte is).

De letters in de opgaven, zoals a , b , x etc., stellen reële getallen voor; complexe getallen komen in dit materiaal niet aan de orde.

De opgaven staan *niet* op volgorde van makkelijk naar moeilijk (dat verschilt overigens sterk per persoon). Dus niet te snel opgeven als het in het begin niet meezit.

Veel succes!

Opgave 1.

	Antwoord: Zekerheid: (Z, VZ, of NZ)
Bereken: a) $(1 + \sqrt{3})^2$	
Schrijf zonder haakjes: b) $(a + b)^2$ c) $(a + b)^4$ d) $(a - b)(a + b)$	
Schrijf zonder breukstreep: e) $\frac{\pi^2 - a^2}{\pi - a}$ f) $\frac{a^4 + a^3 - a^2 - a}{a + 1}$ g) $\frac{(7 + \pi - a)^2 - (7 + a - \pi)^2}{\pi - a}$	
Vul in: h) $b^2 + bc + c^2 = (b + \dots)^2 + \frac{3}{4}c^2$	
Schrijf zo eenvoudig mogelijk: b) $\log(47 + \sqrt{47^2 - 1}) + \log(47 - \sqrt{47^2 - 1})$.	

Wat was de onzekerheid of de moeilijkheid? (Invullen voor gevallen VZ en NZ):

Opgave 2.

Schrijf de volgende uitdrukkingen eenvoudiger:

	Antwoord:	Zekerheid: (Z, VZ, of NZ)
a) 1^1		
b) 6^0		
c) π^0		
d) 1^0		
e) 0^1		
f) $5^2 5^{-3}$		
g) $8^{-3} 4^{5/2}$		
h) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 3^2$		
i) $x^{-3} x^2$		
j) $(x^4)^{1/2}$		
k) $(x^{1/a} y)^{-a}$		
l) $(4^3)^2, 4^{(3^2)}$		

Wat was de onzekerheid of de moeilijkheid? (Invullen voor gevallen VZ en NZ):

Opgave 3.

Schrijf de volgende uitdrukkingen eenvoudiger. Let op: sommige kunnen niet eenvoudiger geschreven worden; antwoord daar 'kan niet.'

	Antwoord:	Zekerheid: (Z, VZ, of NZ)
a) 3^3		
b) π^π		
c) $\ln(10) + \ln 5$		
d) $e^{x \ln 5}$		
e) $2 \ln \pi$		
f) $(\ln 3)^2$		
g) $\ln(3^2)$		
h) $\ln(x + \pi) + \ln(x - \pi)$		

Wat was de onzekerheid of de moeilijkheid? (Invullen voor gevallen VZ en NZ):

Opgave 4.

In een boekje met rekenregels heb ik elf regels voor rekenen met machten gevonden. De eerste was

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s},$$

de rest is door elkaar geraakt. Ik weet alleen dat de de volgende uitdrukkingen links van het gelijkteken voorkwamen:

$$(a \cdot b)^r, \sqrt[r]{a}, \sqrt[s]{a^r}, \frac{d}{dx} a^x, \left(\frac{a}{b}\right)^r, a^0, a^{-r}, \frac{a^r}{a^s}, \frac{d}{dx} x^a, (a^r)^s;$$

en de volgende uitdrukkingen rechts:

$$a^{r \cdot s}, a^r \cdot a^s, \frac{a^r}{b^r}, 1, a^x \cdot \ln a, a \cdot x^{a-1}, a^{r+s}, a^{r-s}, \frac{1}{a^r}, a^{\frac{1}{r}}, a^{\frac{r}{s}}.$$

Maar de goede volgorde van die uitdrukkingen ben ik kwijt.

Herstel de oorspronkelijke lijst hieronder; zet ze ook in een overzichtelijke volgorde. Controleer je antwoorden door voor a , b , r en s getallen in te vullen:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

Opgave 5.

Zelfde opgave als de voorgaande bij een lijst van acht rekenregels over logaritmen (\log) en natuurlijke logaritmen.

Uitdrukkingen links van het gelijkteken:

$$\log\left(\frac{a}{b}\right), \ln e, \ln(a^r), \log 10, \log(a \cdot b), \log(a^r), \ln(a \cdot b), \ln\left(\frac{a}{b}\right),$$

Uitdrukkingen rechts:

$$1, r \cdot \ln a, 1, r \cdot \log a, \log a + \log b, \log a - \log b, \ln a + \ln b, \ln a - \ln b,$$

Bedenk dat

$$y = \log x \iff x = 10^y$$

en

$$y = \ln x \iff x = e^y.$$

=

=

=

=

=

=

=

=

Opgave 6.

Maak uit de hand een schets van de grafieken van de volgende functies:

Functie	Grafiek:	Zekerheid: (Z, VZ, of NZ)
a) $x \mapsto 5 - x$		
b) $x \mapsto \frac{1}{2}$		
c) $x \mapsto \sqrt{5 - x}$		
d) $x \mapsto 5 - x^2$		
e) $x \mapsto \frac{1}{x+1}$		
f) $x \mapsto \sqrt{x^2}$		

Wat was de onzekerheid of de moeilijkheid? (Invullen voor gevallen VZ en NZ):

Opgave 7.

A) Schets de grafieken van:

Functie	Grafiek:	Zekerheid: (Z, VZ, of NZ)
a) $t \mapsto \sin t$		
b) $t \mapsto \cos t$		
c) $t \mapsto \cos 5t$		

B) Lees uit de grafieken af welke van de volgende gelijkheden juist zijn voor alle t :

Gelijkheid	Antwoord: Juist/Onjuist	Zekerheid: (Z, VZ, of NZ)
d) $\sin(-t) = -\sin t$		
e) $\cos(-t) = \cos t$		
f) $\sin(\pi/2 - t) = \cos t$		
g) $\cos(\pi/2 - t) = \sin t$		

Wat was de onzekerheid of de moeilijkheid? (Invullen voor gevallen VZ en NZ):

Opgave 8.

Vul de volgende tabel aan met exacte waarden:

x	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$			0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0		
$\cos x$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1				0					
$\tan x$	-1						\times					

(Met \times wordt *niet gedefinieerd* aangegeven.)

Geef je zekerheid (Z, VZ, OZ) aan op de overeenkomstige plaatsen in de onderstaande kopie van de tabel

x	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$			0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0		
$\cos x$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1				0					
$\tan x$	-1						\times					

Wat was de onzekerheid of de moeilijkheid? (Invullen voor gevallen VZ en NZ):

Opgave 9.

Bepaal voor elk van de volgende vergelijkingen alle reële getallen x die eraan voldoen.

Vergelijking	Antwoord: Zekerheid: (Z, VZ, of NZ)
a) $1 - x = 2 + x$	
b) $x^2 + 3x + 1 = 0$	
c) $x + 1 = \frac{1}{x}$	
d) $1 - x = \sqrt{1 - 2x + x^2}$	
e) $\frac{1}{\sqrt{x-1}} = 5$	

Wat was de onzekerheid of de moeilijkheid? (Invullen voor gevallen VZ en NZ):

Opgave 10.

Bepaal voor elk van de volgende vergelijkingen alle reële getallen q die eraan voldoen.

Vergelijking	Antwoord: Zekerheid: (Z, VZ, of NZ)
a) $q^4 - 1 = \pi$	
b) $q^4 - 1 = -\pi$	
c) $\frac{1}{q+1} = x$	
d) $\frac{144}{(q-2)^2} = 169$	
e) $2yq + 1 = q^2$	
f) $\frac{q-\frac{1}{q}}{2} = y$	
g) $e^q = \pi$	
h) $\pi + e^q = 3$	
i) $e^{2q} + 1 = 2e^q$	
j) $(e^q - e^{-q})^2 + 4 = (e^q + e^{-q})^2$	

Opgave 11.

Differentieer de volgende functies:

Functie	Afgeleide functie:	Zekerheid: (Z, VZ, of NZ)
a) $a(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha+1}$		
b) $b(\beta) = \frac{\beta}{\beta^2+1}$		
c) $c(\gamma) = \frac{\gamma}{\alpha^2+1}$		
d) $d(\delta) = e^{\cos \delta}$		
e) $f(\varphi) = \cos(\varphi + \sin \varphi)$		
f) $g(t) = a^{t^2}$		
g) $h(a) = a^{t^2}$		
h) $i(y) = e^{e^{e^y}}$.		

Wat was de onzekerheid of de moeilijkheid? (Invullen voor gevallen VZ en NZ):