Bewijsbaarheidslogica
Tussentoets
21-10-2004

Opgave A

1. (a.) (10 punten)
   Bewijs dat *niet* geldt: als $\mathbf{K4} \vdash \Box A \to \Box B$ dan $\mathbf{K4} \vdash A \to B$.

   (b.) (10 punten)
   Bewijs dat *wel* geldt: als $\mathbf{K} \vdash \Box A \to \Box B$ dan $\mathbf{K} \vdash A \to B$.

   Hint: Geef een semantisch bewijs.

Opgave B: Sterke volledigheid en GL

Tijdens college hebben we de volledigheids bewijzen van **K**, **K4** en **GL** gezien. Er bestaat nog een sterkere variant van volledigheid, de zogenaamde *sterke volledigheid*. Dit is als volgt gedefinieerd:
Zij **L** een normaal systeem en $< W, R >$ een voor **L** geschikt frame.
Zij Γ een (mogelijk oneindige) verzameling formules en A een formule. Dan geldt

Als op $< W, R >$ geldt dat A waar is in alle werelden waarin alle formules van Γ waar zijn,
dan geldt dat $\mathbf{L},\Gamma \vdash A$.

We definieren $\mathbf{L},\Gamma \vdash A$ op de voor de hand liggende manier. Dus, $\mathbf{L},\Gamma \vdash A$ $:\Leftrightarrow$ $\mathbf{L}\vdash \bigwedge \Gamma' \to A$ voor een zekere eindige $\Gamma' \subseteq \Gamma$. (Als altijd staat $\bigwedge \Gamma$ voor de conjunctie van alle elementen uit Γ.) Sterke volledigheid geldt voor de systemen **K** en **K4**, maar niet voor **GL**. Het laten zien dat **GL** niet sterk volledig is, is het doel van deze opgave.

Dat **GL** niet sterk volledig is, volgt uit het feit dat **GL** niet semantisch compact is. De definitie van semantische compactheid is als volgt:
Zij Γ weer een oneindige verzameling formules. Dan is een normaal systeem **L** semantisch compact als de volgende uitspraak geldt:

Als iedere eindige deelverzameling Δ van Γ een model heeft op een voor **L** geschikt frame,
dan heeft Γ ook een model op een voor **L** geschikt frame.

a. Beschouw de verzameling

$$\Gamma = \{\Diamond p_0, \Box(p_0 \to \Diamond p_1), \Box(p_1 \to \Diamond p_2), \Box(p_2 \to \Diamond p_3), \dots\}.$$

Laat hiermee zien dat **GL** niet semantisch compact is.

b. Laat zien dat voor iedere eindige deelverzameling $\Delta \subseteq \Gamma$ geldt $\mathbf{GL} \nvdash \bigwedge \Delta \to \bot$ en leid hieruit af dat ook niet kan gelden $\mathbf{GL}, \Gamma \vdash \bot$.

c. Leid af dat **GL** niet sterk volledig is.

Opgave C

1. Als oplossing voor de leugenaarsparadox paste Tarski het onderscheid object- en metataal toe op natuurlijke taal. Zo maakte hij het voor een taal onmogelijk om over zijn eigen waarheid te spreken: zodra dat gebeurt wordt het fragment dat het waardeoordeel velt automatisch metataal, relatief aan de rest van het fragment, dat objecttaal wordt.

   Hoe verhoudt zich deze kijk op paradoxen in natuurlijke taal met de stelling van Gödel voor formele systemen, in het bijzonder met de uitdrukbaarheid van de set $\tilde{P}^*$? Geef in je antwoord ook aan wat het onderscheid tussen object- en metataal voor formele systemen inhoudt. (8 punten)

2. Deze vraag gaat over de behandeling van Peano Arithmetic (met exponentiatie) in Smullyan.

   a. (2 punten) Wat betekent het voor een expressie χ als zijn Gödelgetal $g(\chi)$ kleiner is dan 13^5?

   b. Een getal is even, dan en slechts dan als het in base-2 notatie op een nul eindigt. Wat kun je hierover zeggen als je naar de base-13 representatie kijkt. Kun je een voldoende en noodzakelijke voorwaarde geven voor wanneer een getal in base-13 notatie een even getal is? (2 punten)

   c. We definieren de verzameling A als volgt. Een getal n behoort to A desda n even is en kleiner dan 13^5. Laat zien dat A Arithmetisch is. (3 punten)

   d. Hoeveel ware Gödelzinnen zijn er voor de verzameling A? (5 punten)

Opgave D

(a.) Geef een tegenmodel voor:
$\mathbf{GL} \vdash \Box(q \to (\Box r \to r)) \to (q \to \Box r)$

(b.) Laat zien dat (oftewel, freeform bewijzen):
$\mathbf{GL} \vdash \boxdot(\Box p \leftrightarrow q) \to (\Box(q \to (\Box r \to r)) \to (q \to \Box r))$

(c.) Geef voor elk van de volgende formulas een interpolant.

- $\mathbf{GL} \vdash \Box(p \wedge q) \to \Box(q \vee r)$

- **GL** $\vdash (\Box(\Box p \to (p \to r)) \to (\Box\Box p \to \Box((p \wedge \neg r) \to \bot))) \to (\Box(\Box q \to (q \wedge (q \vee p))) \to \Box q)$
- **GL** $\vdash \boxdot(\Box p \leftrightarrow q) \to (\Box(q \to (\Box r \to r)) \to (q \to \Box r))$

Opgave E

Consider the proof in Boolos on page 59 showing the equivalence between $K4LR$ and GL. $K4LR$ is an extension on $K4$ with the *Löb rule* added. We do not look at the statements made about PA.

1. Why is it trivial to prove that GL can derive anything that's also derivable in $K4LR$? *(5 points)*
2. Show how it follows that $K4 \vdash \Box D \to (B \to C)$ (line 12 from below). *(7 points)*
3. Assume that we make a different extension on $K4$, called $K4TR$ ($K4$ with Twöb Rule), such that:

$$K4TR \vdash (\Box A \to A) \Rightarrow K4TR \vdash \Box A$$

In other words: if $K4TR \vdash (\Box A \to A)$, then $K4TR \vdash \Box A$. Are the systems $K4LR$ and $K4TR$ equivalent? If so, prove this, if not, show why not. *(8 points)*

Opgave F

Opgave 1: PA is incompleet. We hebben namelijk een ware maar onbewijsbare zin gevonden, $H[\overline{h}]$ (zie blz 36 van Smullyan). De droom van de wiskundigen was echter om een compleet systeem te vinden. Stel nou dat we dit proberen te krijgen door $H[\overline{h}]$ gewoon als axioma toe te voegen aan PA. Is dat een goede oplossing? (5 punten)

Opgave 2: We hebben gezien dat de meeste sets een hele hoop Gödelzinnen hebben. Maar bestaat er een expressible set waarvoor álle mogelijke zinnen Gödelzinnen zijn? Licht toe. (5 punten)

Opgave 3: Deze opgave heeft betrekking op de definities gegeven op blz 31 van Smullyan.

(a) (2 punten) Geef alle x waarvoor geldt xE_b5076

(b) (2 punten) Doe voor alle antwoorden y bij a: Geef alle x waarvoor geldt xB_by

(c) (6 punten) Er is een part van 5076 die niet in je antwoord b voorkomt. De formele definitie van 'Part of' op blz 31 komt dus niet overeen met de informele beschrijving ervan. Geef aan welke part van 5076 niet voorkomt, geef aan waarom dit zo is en geef een reparatie van de definitie die dit probleem verhelpt.