

# Logica 1

Joost J. Joosten

Universiteit Utrecht  
(sub)faculteit der Wijsbegeerte

Heidelberglaan 8

3584 CS Utrecht

Kamer 158, 030-2535579

[jjoosten@phil.uu.nl](mailto:jjoosten@phil.uu.nl)

[www.phil.uu.nl/~jjoosten](http://www.phil.uu.nl/~jjoosten) (hier moet een tilde bij)

# 2005

- De beste wensen voor het nieuwe jaar

# 2005

- De beste wensen voor het nieuwe jaar
- Waar gaan we in het nieuwe jaar naar toe?

# Vandaag

- Positiebepaling: waar staan we?

# Vandaag

- Positiebepaling: waar staan we?
- Afronden propositie logica

# Vandaag

- Positiebepaling: waar staan we?
- Afronden propositie logica
- Introductie predicatenlogica

# Vandaag

- Kort een aantal opmerkingen over de tussentoets
- Positiebepaling: waar staan we?
- Afronden propositie logica
- Introductie predicatenlogica

# Tussentoets

- Schrijf altijd iets op



# Tussentoets

- Schrijf altijd iets op (Inductie mantra)

# Tussentoets

- Schrijf altijd iets op (Inductie mantra)
- Natuurlijke deductie, controleer elke streep/regel

# Tussentoets

- Schrijf altijd iets op (Inductie mantra)
- Natuurlijke deductie, controleer elke streep/regel
- Natuurlijke deductie: de correctheidsstelling is een leidraad

# Tussentoets

- Schrijf altijd iets op (Inductie mantra)
- Natuurlijke deductie, controleer elke streep/regel
- Natuurlijke deductie: de correctheidsstelling is een leidraad  $\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)$

# Tussentoets

- Schrijf altijd iets op (Inductie mantra)
- Natuurlijke deductie, controleer elke streep/regel
- Natuurlijke deductie: de correctheidsstelling is een leidraad  $\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)$
- Correctheid: raadpleeg internet en volg de werkgroepen.

# Tussentoets

- Schrijf altijd iets op (Inductie mantra)
- Natuurlijke deductie, controleer elke streep/regel
- Natuurlijke deductie: de correctheidsstelling is een leidraad  $\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)$
- Correctheid: raadpleeg internet en volg de werkgroepen.
- Waarheidstabellen: gebruik goed formaat, bv  $p_1 \rightarrow (p_0 \rightarrow p_2)$

# Tussentoets

- Schrijf altijd iets op (Inductie mantra)
- Natuurlijke deductie, controleer elke streep/regel
- Natuurlijke deductie: de correctheidsstelling is een leidraad  $\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)$
- Correctheid: raadpleeg internet en volg de werkgroepen.
- Waarheidstabellen: gebruik goed formaat, bv  $p_1 \rightarrow (p_0 \rightarrow p_2)$  Hier zien we ook de kracht van valuaties!

# Waar staan we?

- Missie (beginnen met proposities (compositionality + bepaaldheid))



# Waar staan we?

- Missie (beginnen met proposities (compositionality + bepaaldheid))
- Redeneren gemodelleerd via natuurlijke deductie  $\vdash \varphi$

# Waar staan we?

- Missie (beginnen met proposities (compositionality + bepaaldheid))
- Redeneren gemodelleerd via natuurlijke deductie  $\vdash \varphi$
- Structurele eigenschappen van waarheid gemodelleerd via waarheidstabellen  $\models \varphi$

# Waar staan we?

- Missie (beginnen met proposities (compositionality + bepaaldheid))
- Redeneren gemodelleerd via natuurlijke deductie  $\vdash \varphi$
- Structurele eigenschappen van waarheid gemodelleerd via waarheidstabellen (en ook via valuaties)  $\models \varphi$

# Waar staan we?

- Missie (beginnen met proposities (compositionality + bepaaldheid))
- Redeneren gemodelleerd via natuurlijke deductie  $\vdash \varphi$
- Structurele eigenschappen van waarheid gemodelleerd via waarheidstabellen (en ook via valuaties)  $\models \varphi$
- Correctheidsstelling

# Waar staan we?

- Missie (beginnen met proposities (compositionality + bepaaldheid))
- Redeneren gemodelleerd via natuurlijke deductie  $\vdash \varphi$
- Structurele eigenschappen van waarheid gemodelleerd via waarheidstabellen (en ook via valuaties)  $\models \varphi$
- Correctheidsstelling
- Gevolgen van de correctheidsstelling:

# Waar staan we?

- Missie (beginnen met proposities (compositionality + bepaaldheid))
- Redeneren gemodelleerd via natuurlijke deductie  $\vdash \varphi$
- Structurele eigenschappen van waarheid gemodelleerd via waarheidstabellen (en ook via valuaties)  $\models \varphi$
- Correctheidsstelling
- Gevolgen van de correctheidsstelling:  
 $\not\vdash \varphi$

# Propositielogica

- Volledigheidsstelling (geen bewijs)

# Propositielogica

- Volledigheidsstelling (geen bewijs)
- Dus, afleidbaarheid ( $\vdash$ ) valt samen met semantische gevolgtrekking ( $\models$ )



# Propositielogica

- Volledigheidsstelling (geen bewijs)
- Dus, afleidbaarheid ( $\vdash$ ) valt samen met semantische gevolgtrekking ( $\models$ )
- Afleidbaarheid is beslisbaar

# Propositielogica

- Volledigheidsstelling (geen bewijs)
- Dus, afleidbaarheid ( $\vdash$ ) valt samen met semantische gevolgtrekking ( $\models$ )
- Afleidbaarheid is beslisbaar
- Waarheidstabellen zijn simpel, maar lang (pinpas)

# Beperkingen propositielogica

- Alle mensen zijn sterfelijk, Socrates is een mens, dus Socrates is sterfelijk.

# Beperkingen propositielogica

- Alle mensen zijn sterfelijk, Socrates is een mens, dus Socrates is sterfelijk.
- $\varphi \wedge \psi \rightarrow \sigma$

# Quantificatie en predicaten

- Socrates is een mens

# Quantificatie en predicaten

- Socrates is een mens  $M(s)$

# Quantificatie en predicaten

- Socrates is een mens  $M(s)$
- Predicaten en objecten

# Redeneren met quantificatie

- We kunnen universele uitspraken instantiëren



# Redeneren met quantificatie

- We kunnen universele uitspraken instantiëren
- Voorbeeld:

# Redeneren met quantificatie

- We kunnen universele uitspraken instantiëren
- Voorbeeld:  $\forall x (M(x) \rightarrow S(x))$

# Redeneren met quantificatie

- We kunnen universele uitspraken instantiëren
- Voorbeeld:  $\forall x (M(x) \rightarrow S(x))$
- Via een instantiatie komen we tot:

# Redeneren met quantificatie

- We kunnen universele uitspraken instantiëren
- Voorbeeld:  $\forall x (M(x) \rightarrow S(x))$
- Via een instantiatie komen we tot:  $M(s) \rightarrow S(s)$

# Redeneren met quantificatie

- We kunnen universele uitspraken instantiëren
- Voorbeeld:  $\forall x (M(x) \rightarrow S(x))$
- Via een instantiatie komen we tot:  $M(s) \rightarrow S(s)$
- En wegens

# Redeneren met quantificatie

- We kunnen universele uitspraken instantiëren
- Voorbeeld:  $\forall x (M(x) \rightarrow S(x))$
- Via een instantiatie komen we tot:  $M(s) \rightarrow S(s)$
- En wegens  $M(s)$

# Redeneren met quantificatie

- We kunnen universele uitspraken instantiëren
- Voorbeeld:  $\forall x (M(x) \rightarrow S(x))$
- Via een instantiatie komen we tot:  $M(s) \rightarrow S(s)$
- En wegens  $M(s)$
- krijgen we via Modus Ponens,  $S(s)$

# Predicatenlogica

- Aristoteles heeft een zeer beperkt deel van de predicaten logica in kaart gebracht met zijn syllogismen.



# Predicatenlogica

- Aristoteles heeft een zeer beperkt deel van de predicaten logica in kaart gebracht met zijn syllogismen.
- Wij zullen een grotere en betere kaart maken

# Predicatenlogica

- Aristoteles heeft een zeer beperkt deel van de predicaten logica in kaart gebracht met zijn syllogismen.
- Wij zullen een grotere en betere kaart maken
- Hiertoe zullen we eerst heel erg nauwkeurig onze taal specificeren

# Predicatenlogica

- We quantificeren alleen over objecten

# Predicatenlogica

- We quantificeren alleen over objecten
- Dit ligt besloten in de term *eerste orde logica*

# Predicatenlogica

- We quantificeren alleen over objecten
- Dit ligt besloten in de term *eerste orde logica*
- We kunnen dus uitspraken als  
    Ieder object heeft een eigenschap  
**NIET** uitdrukken in eerste orde logica!

# Predicatenlogica

- We quantificeren alleen over objecten
- Dit ligt besloten in de term *eerste orde logica*
- We kunnen dus uitspraken als  
    Ieder object heeft een eigenschap  
**NIET** uitdrukken in eerste orde logica!
- $\forall x \exists P P(x)$

# Predicatenlogica

- We quantificeren alleen over objecten
- Dit ligt besloten in de term *eerste orde logica*
- We kunnen dus uitspraken als  
    Ieder object heeft een eigenschap  
**NIET** uitdrukken in eerste orde logica!
- $\forall x \exists P P(x)$
- Tweede orde (en hogere orde) logica

# Predicaten logica

- Definitie: Taal en formules van predicaten logica (wij zullen zonder functies werken)



# Predicaten logica

- Definitie: Taal en formules van predicaten logica (wij zullen zonder functies werken)
- Voor later: hoe kunnen we redeneren in kaart brengen?

# Predicaten logica

- Definitie: Taal en formules van predicaten logica (wij zullen zonder functies werken)
- Voor later: hoe kunnen we redeneren in kaart brengen?
- Voor nu: uitdrukkingskracht van predicatenlogica verkennen

# Vertalingen

- Kies een vertaalsleutel  $H(x, y)$  voor  $x$  houdt van  $y$

# Vertalingen

- Kies een vertaalsleutel  $H(x, y)$  voor  $x$  houdt van  $y$
- Er is iemand die van iedereen houdt

# Vertalingen

- Kies een vertaalsleutel  $H(x, y)$  voor  $x$  houdt van  $y$
- Er is iemand die van iedereen houdt Haleluja!

# Vertalingen

- Kies een vertaalsleutel  $H(x, y)$  voor  $x$  houdt van  $y$
- Er is iemand die van iedereen houdt Haleluja!
- Iedereen houdt van iedereen

# Vertalingen

- Kies een vertaalsleutel  $H(x, y)$  voor  $x$  houdt van  $y$
- Er is iemand die van iedereen houdt Haleluja!
- Iedereen houdt van iedereen
- Iedereen houdt van zichzelf

# Vertalingen

- Kies een vertaalsleutel  $H(x, y)$  voor  $x$  houdt van  $y$
- Er is iemand die van iedereen houdt Haleluja!
- Iedereen houdt van iedereen
- Iedereen houdt van zichzelf
- Er is iemand die van niemand houdt



# Vertalingen

- Kies een vertaalsleutel  $H(x, y)$  voor  $x$  houdt van  $y$
- Er is iemand die van iedereen houdt Haleluja!
- Iedereen houdt van iedereen
- Iedereen houdt van zichzelf
- Er is iemand die van niemand houdt
- Waarheid is afhankelijk van de *interpretatie*

# Vertalingen

- Kies een vertaalsleutel  $H(x, y)$  voor  $x$  houdt van  $y$
- Er is iemand die van iedereen houdt Haleluja!
- Iedereen houdt van iedereen
- Iedereen houdt van zichzelf
- Er is iemand die van niemand houdt
- Waarheid is afhankelijk van de *interpretatie* (contingenties)

# Semantiek

- Voor een fragment van de predicaatenlogica kunnen we een model specificeren

# Semantiek

- Voor een fragment van de predicaatlogica kunnen we een model specificeren
- Dit model bestaat uit een tweetal ingrediënten

# Semantiek

- Voor een fragment van de predicaatenlogica kunnen we een model specificeren
- Dit model bestaat uit een tweetal ingrediënten
  - Domein

# Semantiek

- Voor een fragment van de predicaatlogica kunnen we een model specificeren
- Dit model bestaat uit een tweetal ingrediënten
  - Domein (universum)

# Semantiek

- Voor een fragment van de predicaatenlogica kunnen we een model specificeren
- Dit model bestaat uit een tweetal ingrediënten
  - Domein (universum)
  - Interpretatie van de betreffende predicaaten symbolen

# Semantiek

- Voor een fragment van de predicaatlogica kunnen we een model specificeren
- Dit model bestaat uit een tweetal ingrediënten
  - Domein (universum)
  - Interpretatie van de betreffende predicaatensymbolen, relaties op het domein



# Semantiek

- We beschouwen verschillende modellen voor onze eerder voorbeelden

# Semantiek

- We beschouwen verschillende modellen voor onze eerder voorbeelden
- Er is iemand die van iedereen houdt

# Semantiek

- We beschouwen verschillende modellen voor onze eerder voorbeelden
- Er is iemand die van iedereen houdt Haleluja!

# Semantiek

- We beschouwen verschillende modellen voor onze eerder voorbeelden
- Er is iemand die van iedereen houdt Haleluja!
- Iedereen houdt van iedereen

# Semantiek

- We beschouwen verschillende modellen voor onze eerder voorbeelden
- Er is iemand die van iedereen houdt Haleluja!
- Iedereen houdt van iedereen
- Iedereen houdt van zichzelf

# Semantiek

- We beschouwen verschillende modellen voor onze eerder voorbeelden
- Er is iemand die van iedereen houdt Haleluja!
- Iedereen houdt van iedereen
- Iedereen houdt van zichzelf
- Er is iemand die van niemand houdt

# Identiteit

- Meestal veronderstellen we dat we identiteit (=) als predicaat hebben

# Identiteit

- Meestal veronderstellen we dat we identiteit (=) als predicaat hebben
- Er is iemand die alleen van zichzelf houdt



# Identiteit

- Meestal veronderstellen we dat we identiteit (=) als predicaat hebben
- Er is iemand die alleen van zichzelf houdt
- Iedereen houdt van tenminste twee mensen

# Identiteit

- Meestal veronderstellen we dat we identiteit (=) als predicaat hebben
- Er is iemand die alleen van zichzelf houdt
- Iedereen houdt van tenminste twee mensen
- Wederom, semantiek

# Dit college

- Belangrijkste doelstellingen van dit college

# Dit college

- Belangrijkste doelstellingen van dit college
- Het kunnen modelleren van gekwantificeerde uitspraken m.b.v. eerste orde predicaten logica

# Dit college

- Belangrijkste doelstellingen van dit college
- Het kunnen modelleren van gekwantificeerde uitspraken m.b.v. eerste orde predicaten logica
- Het specificeren van modellen (semantiek) voor fragmenten van eerste orde predicaten logica