

Logica 1

Joost J. Joosten

Universiteit Utrecht
(sub)faculteit der Wijsbegeerte

Heidelberglaan 8

3584 CS Utrecht

Kamer 158, 030-2535579

jjoosten@phil.uu.nl

www.phil.uu.nl/~jjoosten (hier moet een tilde bij)

Vandaag

- Inductieprincipes

Vandaag

- Inductieprincipes
- Correctheidsstelling

Vandaag

- Inductieprincipes
- Correctheidsstelling
- Gevolgen van de correctheidsstelling:

Vandaag

- Inductieprincipes
- Correctheidsstelling
- Gevolgen van de correctheidsstelling:

$\nexists \varphi$

Vandaag

- Inductieprincipes
- Correctheidsstelling
- Gevolgen van de correctheidsstelling:
 $\vdash \varphi$
- Geen pauze!

Universele uitspraken

- Hoe kunnen we universele uitspraken bewijzen?

Universele uitspraken

- Hoe kunnen we universele uitspraken bewijzen?
- Niet?

Universele uitspraken

- Hoe kunnen we universele uitspraken bewijzen?
- Niet?
- Een socioloog, een fysicus en een filosoof zitten in de trans-Sibirische express . . .

Universele uitspraken

- Als we extra informatie over het *domein* weten

Universele uitspraken

- Als we extra informatie over het *domein* weten
- Bijvoorbeeld: als Dolly en Polly zwart zijn, en

Universele uitspraken

- Als we extra informatie over het *domein* weten
- Bijvoorbeeld: als Dolly en Polly zwart zijn, en
- als Dolly en Polly de voorouders zijn van alle Russische schapen, en

Universele uitspraken

- Als we extra informatie over het *domein* weten
- Bijvoorbeeld: als Dolly en Polly zwart zijn, en
- als Dolly en Polly de voorouders zijn van alle Russische schapen, en
- als zwart een dominant fenotype is,

Universele uitspraken

- Als we extra informatie over het *domein* weten
- Bijvoorbeeld: als Dolly en Polly zwart zijn, en
- als Dolly en Polly de voorouders zijn van alle Russische schapen, en
- als zwart een dominant fenotype is,
- dan zijn alle Russische schapen zwart!

Universele uitspraken

- Als we extra informatie over het *domein* weten
- Bijvoorbeeld: als Dolly en Polly zwart zijn, en
- als Dolly en Polly de voorouders zijn van alle Russische schapen, en
- als zwart een dominant fenotype is,
- dan zijn alle Russische schapen zwart!
- Dit is volledige inductie!

Inductieprincipes

- Slogan: iedere inductief gedefinieerde verzameling heeft zijn eigen inductie principe.

Inductieprincipes

- Slogan: iedere inductief gedefinieerde verzameling heeft zijn eigen inductie principe.
- Voorbeeld: formule inductie

Inductieprincipes

- Slogan: iedere inductief gedefinieerde verzameling heeft zijn eigen inductie principe.
- Voorbeeld: formule inductie
 - Als alle atomaire formules eigenschap P hebben

Inductieprincipes

- Slogan: iedere inductief gedefinieerde verzameling heeft zijn eigen inductie principe.
- Voorbeeld: formule inductie
 - Als alle atomaire formules eigenschap P hebben
 - Als P behouden blijft onder het samenstellen met connectieven

Inductieprincipes

- Slogan: iedere inductief gedefinieerde verzameling heeft zijn eigen inductie principe.
- Voorbeeld: formule inductie
 - Als alle atomaire formules eigenschap P hebben
 - Als P behouden blijft onder het samenstellen met connectieven
- Dan hebben alle formules eigenschap P .

Inductieprincipes

- Slogan: iedere inductief gedefinieerde verzameling heeft zijn eigen inductie principe.
- Voorbeeld: formule inductie
 - Als alle atomaire formules eigenschap P hebben
 - Als P behouden blijft onder het samenstellen met connectieven
 - Als $P(\varphi)$ en $P(\psi)$, dan $P((\varphi \wedge \psi))$
- Dan hebben alle formules eigenschap P .

Inductieprincipes

- Slogan: iedere inductief gedefinieerde verzameling heeft zijn eigen inductie principe.
- Voorbeeld: formule inductie
 - Als alle atomaire formules eigenschap P hebben
 - Als P behouden blijft onder het samenstellen met connectieven
 - Als $P(\varphi)$ en $P(\psi)$, dan $P((\varphi \wedge \psi))$
 - Als $P(\varphi)$ en $P(\psi)$, dan $P((\varphi \vee \psi))$
 - Dan hebben alle formules eigenschap P .

Inductieprincipes

- Slogan: iedere inductief gedefinieerde verzameling heeft zijn eigen inductie principe.
- Voorbeeld: formule inductie
 - Als alle atomaire formules eigenschap P hebben
 - Als P behouden blijft onder het samenstellen met connectieven
 - Als $P(\varphi)$ en $P(\psi)$, dan $P((\varphi \wedge \psi))$
 - Als $P(\varphi)$ en $P(\psi)$, dan $P((\varphi \vee \psi))$
 - Als $P(\varphi)$ en $P(\psi)$, dan $P((\varphi \rightarrow \psi))$
 - Dan hebben alle formules eigenschap P .

Inductieprincipes

- Slogan: iedere inductief gedefinieerde verzameling heeft zijn eigen inductie principe.
- Voorbeeld: formule inductie
 - Als alle atomaire formules eigenschap P hebben
 - Als P behouden blijft onder het samenstellen met connectieven
 - Als $P(\varphi)$ en $P(\psi)$, dan $P((\varphi \wedge \psi))$
 - Als $P(\varphi)$ en $P(\psi)$, dan $P((\varphi \vee \psi))$
 - Als $P(\varphi)$ en $P(\psi)$, dan $P((\varphi \rightarrow \psi))$
 - Als $P(\psi)$, dan $P(\neg\psi)$
 - Dan hebben alle formules eigenschap P .

Inductieprincipes

We kunnen nu de indrukwekkende stelling bewijzen dat elke formule een even aantal haakjes heeft.

Inductieprincipes

- Je moet gegeven een inductieve definitie het corresponderende inductie principe kunnen formuleren

Inductieprincipes

- Je moet gegeven een inductieve definitie het corresponderende inductie principe kunnen formuleren
- Bijvoorbeeld
 - $\dagger \in \Sigma$
 - Als $x \in \Sigma$, dan $\oplus x \in \Sigma$

Inductieprincipes

- Je moet gegeven een inductieve definitie het corresponderende inductie principe kunnen formuleren
- Bijvoorbeeld
 - $\dagger \in \Sigma$
 - Als $x \in \Sigma$, dan $\oplus x \in \Sigma$
- Bijbehorend inductieprincipe:

Inductieprincipes

- Je moet gegeven een inductieve definitie het corresponderende inductie principe kunnen formuleren
- Bijvoorbeeld
 - $\dagger \in \Sigma$
 - Als $x \in \Sigma$, dan $\oplus x \in \Sigma$
- Bijbehorend inductieprincipe:
$$P(\dagger) \wedge \forall x (P(x) \Rightarrow P(\oplus x)) \Rightarrow \forall x P(x)$$

Bewijzen

- Bewijzen zijn ook inductief gedefinieerd

Bewijzen

- Bewijzen zijn ook inductief gedefinieerd
- Dus, er is een inductieprincipe voor bewijzen

Bewijzen en Inductie

- Te Bewijzen: Ieder bewijs heeft eigenschap P

Bewijzen en Inductie

- Te Bewijzen: Ieder bewijs heeft eigenschap P
- Bewijs: met volledige inductie (over bewijzen).

Bewijzen en Inductie

- Te Bewijzen: Ieder bewijs heeft eigenschap P
- Bewijs: met volledige inductie (over bewijzen).
 - Basis:

Bewijzen en Inductie

- Te Bewijzen: ieder bewijs heeft eigenschap P
- Bewijs: met volledige inductie (over bewijzen).
 - Basis: ieder (atomair) bewijs φ heeft eigenschap P

Bewijzen en Inductie

- Te Bewijzen: ieder bewijs heeft eigenschap P
- Bewijs: met volledige inductie (over bewijzen).
 - Basis: ieder (atomair) bewijs φ heeft eigenschap P
 - Inductiestap:

Bewijzen en Inductie

- Te Bewijzen: ieder bewijs heeft eigenschap P
- Bewijs: met volledige inductie (over bewijzen).
 - Basis: ieder (atomair) bewijs φ heeft eigenschap P
 - Inductiestap: (De eigenschap P blijft behouden onder het maken van nieuwe bewijzen)

Bewijzen en Inductie

- Te Bewijzen: ieder bewijs heeft eigenschap P
- Bewijs: met volledige inductie (over bewijzen).
 - Basis: ieder (atomair) bewijs φ heeft eigenschap P
 - Inductiestap: (De eigenschap P blijft behouden onder het maken van nieuwe bewijzen)

Stel dat \mathcal{D} heeft eigenschap P en stel dat \mathcal{D}' heeft eigenschap P .

Bewijzen en Inductie

- Te Bewijzen: ieder bewijs heeft eigenschap P
- Bewijs: met volledige inductie (over bewijzen).
 - Basis: ieder (atomair) bewijs φ heeft eigenschap P
 - Inductiestap: (De eigenschap P blijft behouden onder het maken van nieuwe bewijzen)

Stel dat $\frac{\mathcal{D}}{\varphi}$ heeft eigenschap P en stel dat $\frac{\mathcal{D}'}{\psi}$ heeft eigenschap P .

We willen dat $\frac{\frac{\mathcal{D}}{\varphi} \quad \frac{\mathcal{D}'}{\psi}}{\varphi \wedge \psi} \wedge I$ eigenschap P heeft.

Bewijzen en Inductie

- Te Bewijzen: ieder bewijs heeft eigenschap P
- Bewijs: met volledige inductie (over bewijzen).
 - Basis: ieder (atomair) bewijs φ heeft eigenschap P
 - Inductiestap: (De eigenschap P blijft behouden onder het maken van nieuwe bewijzen)

Stel dat $\frac{\mathcal{D}}{\varphi}$ heeft eigenschap P en stel dat $\frac{\mathcal{D}'}{\psi}$ heeft eigenschap P .

We willen dat $\frac{\frac{\mathcal{D}}{\varphi} \quad \frac{\mathcal{D}'}{\psi}}{\varphi \wedge \psi} \wedge I$ eigenschap P heeft.
blablabla

Bewijzen en Inductie


- Te Bewijzen: ieder bewijs heeft eigenschap P
- Bewijs: met volledige inductie (over bewijzen).
 - Basis: ieder (atomair) bewijs φ heeft eigenschap P
 - Inductiestap: (De eigenschap P blijft behouden onder het maken van nieuwe bewijzen)

Stel dat $\overset{\mathcal{D}}{\varphi}$ heeft eigenschap P en stel dat $\overset{\mathcal{D}'}{\psi}$ heeft eigenschap P .

We willen dat $\frac{\overset{\mathcal{D}}{\varphi} \quad \overset{\mathcal{D}'}{\psi}}{\varphi \wedge \psi} \wedge^I$ eigenschap P heeft.
blablabla

- Q.E.D.

Correctheidsstelling


$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$$

Correctheidsstelling

- $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$
- Te bewijzen: voor elke derivatie \mathcal{D} hebben we dat $A(\mathcal{D}) \vdash C(\mathcal{D})$.

Correctheidsstelling

- $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$
- Te bewijzen: voor elke derivatie \mathcal{D} hebben we dat $A(\mathcal{D}) \vdash C(\mathcal{D})$.
Hierbij is $A(\mathcal{D})$ de verzameling aannames in \mathcal{D} en $C(\mathcal{D})$ de conclusie van \mathcal{D} .

Correctheidsstelling

- $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$
- Te bewijzen: voor elke derivatie \mathcal{D} hebben we dat $A(\mathcal{D}) \vdash C(\mathcal{D})$.
Hierbij is $A(\mathcal{D})$ de verzameling aannames in \mathcal{D} en $C(\mathcal{D})$ de conclusie van \mathcal{D} .
- Bewijs: met volledige inductie (over bewijzen).

Correctheidsstelling

- $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$
- Te bewijzen: voor elke derivatie \mathcal{D} hebben we dat $A(\mathcal{D}) \vdash C(\mathcal{D})$.
Hierbij is $A(\mathcal{D})$ de verzameling aannames in \mathcal{D} en $C(\mathcal{D})$ de conclusie van \mathcal{D} .
- Bewijs: met volledige inductie (over bewijzen).
bla

Correctheidsstelling

- $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$
- Te bewijzen: voor elke derivatie \mathcal{D} hebben we dat $A(\mathcal{D}) \vdash C(\mathcal{D})$.
Hierbij is $A(\mathcal{D})$ de verzameling aannames in \mathcal{D} en $C(\mathcal{D})$ de conclusie van \mathcal{D} .
- Bewijs: met volledige inductie (over bewijzen).
bla
bla

Correctheidsstelling

- $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$
- Te bewijzen: voor elke derivatie \mathcal{D} hebben we dat $A(\mathcal{D}) \vdash C(\mathcal{D})$.
Hierbij is $A(\mathcal{D})$ de verzameling aannames in \mathcal{D} en $C(\mathcal{D})$ de conclusie van \mathcal{D} .
- Bewijs: met volledige inductie (over bewijzen).
bla
bla
bla

Correctheidsstelling

- $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$
- Te bewijzen: voor elke derivatie \mathcal{D} hebben we dat $A(\mathcal{D}) \vdash C(\mathcal{D})$.
Hierbij is $A(\mathcal{D})$ de verzameling aannames in \mathcal{D} en $C(\mathcal{D})$ de conclusie van \mathcal{D} .
- Bewijs: met volledige inductie (over bewijzen).
bla
bla
bla
- Q.E.D.

Gevolgen

- Hoe te beslissen $\Vdash \psi$?

Gevolgen

- Hoe te beslissen $\vDash \psi$?
- Beslisbaarheid? (mechanische zoekprocedure (calculamus))