

Logica 1

Joost J. Joosten

Universiteit Utrecht
(sub)faculteit der Wijsbegeerte

Heidelberglaan 8

3584 CS Utrecht

Kamer 158, 030-2535579

jjoosten@phil.uu.nl

www.phil.uu.nl/~jjoosten (hier moet een tilde bij)

Vandaag

- Recapitulatie vorig college.

Vandaag

- Recapitulatie vorig college. Trek aan de rem als het te snel gaat.

Vandaag

- Recapitulatie vorig college. Trek aan de rem als het te snel gaat.
- Correctheid natuurlijke deductie voorbereiden

Vandaag

- Recapitulatie vorig college. Trek aan de rem als het te snel gaat.
- Correctheid natuurlijke deductie voorbereiden
- Inductieve bewijzen

Tautologieën

- Definitie tautologie: overal in de waarheidstabel staan énen.

Tautologieën

- Definitie tautologie: overal in de waarheidstabel staan énen.
- We gaan een iets beter vocabularium ontwikkelen om over waarheidstafels te spreken.

Tautologieën

- Definitie tautologie: overal in de waarheidstabel staan énen.
- We gaan een iets beter vocabularium ontwikkelen om over waarheidstafels te spreken.
- We noemen een rij in het linker deel van een waarheidstabel een *valuatie*.

Tautologieën

- Definitie tautologie: overal in de waarheidstabel staan énen.
- We gaan een iets beter vocabularium ontwikkelen om over waarheidstafels te spreken.
- We noemen een rij in het linker deel van een waarheidstabel een *valuatie*.
- In andere woorden, een valuatie zegt bij elke propositie letter of deze waar (1) is of niet (0).

Valuaties

- Waarheidstafels zeggen ons hoe wij valuaties tot formules uit moeten breiden.

Valuaties

- Waarheidstafels zeggen ons hoe wij valuaties tot formules uit moeten breiden.
- Bijvoorbeeld: $v(\varphi \wedge \psi) = \min\{v(\varphi), v(\psi)\}$

Valuaties

- Waarheidstafels zeggen ons hoe wij valuaties tot formules uit moeten breiden.
- Bijvoorbeeld: $v(\varphi \wedge \psi) = \min\{v(\varphi), v(\psi)\} = v(\varphi) \cdot v(\psi)$

Valuaties

- Waarheidstafels zeggen ons hoe wij valuaties tot formules uit moeten breiden.
- Bijvoorbeeld: $v(\varphi \wedge \psi) = \min\{v(\varphi), v(\psi)\} = v(\varphi) \cdot v(\psi)$
- Een formule ψ is een tautologie als $v(\psi) = 1$ voor alle valuaties v .

Valuaties

- Waarheidstafels zeggen ons hoe wij valuaties tot formules uit moeten breiden.
- Bijvoorbeeld: $v(\varphi \wedge \psi) = \min\{v(\varphi), v(\psi)\} = v(\varphi) \cdot v(\psi)$
- Een formule ψ is een tautologie als $v(\psi) = 1$ voor alle valuaties v .
- Voorbeeld: $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$.

Meer valuaties

• Definitie: $\varphi \models \psi$

Meer valuaties

- Definitie: $\varphi \models \psi$
- Definitie: $\Gamma \models \psi$

Meer valuaties

- Definitie: $\varphi \models \psi$
- Definitie: $\Gamma \models \psi$
- Definitie: $\models \varphi$.

Falsum en Verum

- De waarheidstabel van $\neg\varphi$ en $\varphi \rightarrow \perp$ zijn “dezelfde”.

Falsum en Verum

- De waarheidstabel van $\neg\varphi$ en $\varphi \rightarrow \perp$ zijn “dezelfde”.
- Van nu af aan zullen we $\neg\varphi$ schrijven en $\varphi \rightarrow \perp$ bedoelen: het is een verkorte schrijfwijze.

Falsum en Verum

- De waarheidstabel van $\neg\varphi$ en $\varphi \rightarrow \perp$ zijn “dezelfde”.
- Van nu af aan zullen we $\neg\varphi$ schrijven en $\varphi \rightarrow \perp$ bedoelen: het is een verkorte schrijfwijze.
- Evenzo zal van nu af aan $\varphi \leftrightarrow \psi$ verkorte schrijfwijze zijn voor $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$

Nogmaals deductie

- Nog één connectief: falsum

Nogmaals deductie

- Nog één connectief: falsum
- Ex falso sequitur quidlibet

Nogmaals deductie

- Nog één connectief: falsum
- Ex falso sequitur quidlibet
- Reductio ad absurdum

Nogmaals deductie

- Nog één connectief: falsum
- Ex falso sequitur quidlibet
- Reductio ad absurdum
Stel Piet heeft de afgelopen tien dagen niets gegeten en niets gedronken...

Meer deductie

- Onze kaart is nu af!

Meer deductie

- Onze kaart is nu af!
- Hoe veel regels? Welke regels? Welke notatie?

Meer deductie

• Definitie: $\varphi \vdash \psi$

Meer deductie

- Definitie: $\varphi \vdash \psi$
- Definitie: $\Gamma \vdash \psi$

Meer deductie

- Definitie: $\varphi \vdash \psi$
- Definitie: $\Gamma \vdash \psi$
- Definitie: $\vdash \varphi$.

Correctheid redeneren

- Is alles wat wij kunnen bewijzen ook waar?

Correctheid redeneren

- Is alles wat wij kunnen bewijzen ook waar?
- $\vdash \varphi \Rightarrow \models \varphi$?

Correctheid redeneren

- Is alles wat wij kunnen bewijzen ook waar?
- $\vdash \varphi \Rightarrow \models \varphi$?
- We zullen bewijzen dat voor elk bewijs $\Gamma \vdash \varphi$ ook geldt $\Gamma \models \varphi$.

Correctheid redeneren

- Is alles wat wij kunnen bewijzen ook waar?
- $\vdash \varphi \Rightarrow \models \varphi$?
- We zullen bewijzen dat voor elk bewijs $\Gamma \vdash \varphi$ ook geldt $\Gamma \models \varphi$.
- Hoe kunnen wij *universele* uitspraken bewijzen?

Universele uitspraken

Hoe kunnen wij universele uitspraken bewijzen?

- Generalisatie

Universele uitspraken

Hoe kunnen wij universele uitspraken bewijzen?

- Generalisatie
- Eindig domein

Universele uitspraken

Hoe kunnen wij universele uitspraken bewijzen?

- Generalisatie
- Eindig domein
- Reductie

Universele uitspraken

Hoe kunnen wij universele uitspraken bewijzen?

- Generalisatie
- Eindig domein
- Reductie
- Inductie

Inductie

- Thema/techniek van deze week: inductie

Inductie

- Thema/techniek van deze week: inductie
- Natuurlijke getallen zijn *inductief* gedefinieerd

Inductie

- Thema/techniek van deze week: inductie
- Natuurlijke getallen zijn *inductief* gedefinieerd
- Een inductieve definitie heeft altijd twee componenten

Inductie

- Thema/techniek van deze week: inductie
- Natuurlijke getallen zijn *inductief* gedefinieerd
- Een inductieve definitie heeft altijd twee componenten
 - Basis

Inductie

- Thema/techniek van deze week: inductie
- Natuurlijke getallen zijn *inductief* gedefinieerd
- Een inductieve definitie heeft altijd twee componenten
 - Basis
 - Inductiestap

Inductie

- Thema/techniek van deze week: inductie
- Natuurlijke getallen zijn *inductief* gedefinieerd
- Een inductieve definitie heeft altijd twee componenten
 - Basis
 - Inductiestap
- Voorbeeld: formules

Inductie

- Thema/techniek van deze week: inductie
- Natuurlijke getallen zijn *inductief* gedefinieerd
- Een inductieve definitie heeft altijd twee componenten
 - Basis
 - Inductiestap
- Voorbeeld: formules
- Voorbeeld: bewijzen

Inductie

- Thema/techniek van deze week: inductie
- Natuurlijke getallen zijn *inductief* gedefinieerd
- Een inductieve definitie heeft altijd twee componenten
 - Basis
 - Inductiestap
- Voorbeeld: formules
- Voorbeeld: bewijzen
- Makkelijkste voorbeeld:

Inductie

- Thema/techniek van deze week: inductie
- Natuurlijke getallen zijn *inductief* gedefinieerd
- Een inductieve definitie heeft altijd twee componenten
 - Basis
 - Inductiestap
- Voorbeeld: formules
- Voorbeeld: bewijzen
- Makkelijkste voorbeeld: natuurlijke getallen

Getallen

Getallen

- Wees niet bang voor wiskunde

Getallen

- Wees niet bang voor wiskunde
- Voorbeeld: Gauss

Getallen

- Wees niet bang voor wiskunde
- Voorbeeld: Gauss
- Voorbeeld: Torens van Hanoi

Inductieprincipes

- Slogan: iedere inductief gedefinieerde verzameling heeft zijn eigen inductie principe.

Inductieprincipes

- Slogan: iedere inductief gedefinieerde verzameling heeft zijn eigen inductie principe.
- Voorbeeld: formule inductie

Inductieprincipes

- Slogan: iedere inductief gedefinieerde verzameling heeft zijn eigen inductie principe.
- Voorbeeld: formule inductie
 - Als alle atomaire formules eigenschap P hebben

Inductieprincipes

- Slogan: iedere inductief gedefinieerde verzameling heeft zijn eigen inductie principe.
- Voorbeeld: formule inductie
 - Als alle atomaire formules eigenschap P hebben
 - Als P behouden blijft onder het samenstellen met connectieven

Inductieprincipes

- Slogan: iedere inductief gedefinieerde verzameling heeft zijn eigen inductie principe.
- Voorbeeld: formule inductie
 - Als alle atomaire formules eigenschap P hebben
 - Als P behouden blijft onder het samenstellen met connectieven
- Dan hebben alle formules eigenschap P .

Inductieprincipes

- Slogan: iedere inductief gedefinieerde verzameling heeft zijn eigen inductie principe.
- Voorbeeld: formule inductie
 - Als alle atomaire formules eigenschap P hebben
 - Als P behouden blijft onder het samenstellen met connectieven
 - Als $P(\varphi)$ en $P(\psi)$, dan $P((\varphi \wedge \psi))$
 - Dan hebben alle formules eigenschap P .

Inductieprincipes

- Slogan: iedere inductief gedefinieerde verzameling heeft zijn eigen inductie principe.
- Voorbeeld: formule inductie
 - Als alle atomaire formules eigenschap P hebben
 - Als P behouden blijft onder het samenstellen met connectieven
 - Als $P(\varphi)$ en $P(\psi)$, dan $P((\varphi \wedge \psi))$
 - Als $P(\varphi)$ en $P(\psi)$, dan $P((\varphi \vee \psi))$
 - Dan hebben alle formules eigenschap P .

Inductieprincipes

- Slogan: iedere inductief gedefinieerde verzameling heeft zijn eigen inductie principe.
- Voorbeeld: formule inductie
 - Als alle atomaire formules eigenschap P hebben
 - Als P behouden blijft onder het samenstellen met connectieven
 - Als $P(\varphi)$ en $P(\psi)$, dan $P((\varphi \wedge \psi))$
 - Als $P(\varphi)$ en $P(\psi)$, dan $P((\varphi \vee \psi))$
 - Als $P(\varphi)$ en $P(\psi)$, dan $P((\varphi \rightarrow \psi))$
 - Dan hebben alle formules eigenschap P .

Inductieprincipes

- Slogan: iedere inductief gedefinieerde verzameling heeft zijn eigen inductie principe.
- Voorbeeld: formule inductie
 - Als alle atomaire formules eigenschap P hebben
 - Als P behouden blijft onder het samenstellen met connectieven
 - Als $P(\varphi)$ en $P(\psi)$, dan $P((\varphi \wedge \psi))$
 - Als $P(\varphi)$ en $P(\psi)$, dan $P((\varphi \vee \psi))$
 - Als $P(\varphi)$ en $P(\psi)$, dan $P((\varphi \rightarrow \psi))$
 - Als $P(\psi)$, dan $P(\neg\psi)$
 - Dan hebben alle formules eigenschap P .

Inductieprincipes

We kunnen nu de indrukwekkende stelling bewijzen dat elke formule een even aantal haakjes heeft.

Technieken

- Week 1: natuurlijke deductie

Technieken

- Week 1: natuurlijke deductie
- Week 2: waarheidstabellen

Technieken

- Week 1: natuurlijke deductie
- Week 2: waarheidstabellen
- Week 3: inductie