Logica voor Filosofen
WB1BD4052
2004-2005
Tussentoets

Docent: Joost J. Joosten

Donderdag 23 december

1 Waarheidstafels

Geef de waarheidstafel van $\psi \to (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)$.

2 Natuurlijke deductie

1. Geef een bewijs met natuurlijke deductie van $\psi \to (\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\varphi \vee \psi)$.
2. Geef een bewijs[1] met natuurlijke deductie van $(\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\varphi \vee \psi) \to \psi$.
3. Geef een bewijs met natuurlijke deductie van $(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi) \to \psi$.
4. Geef een bewijs[2] met natuurlijke deductie van $\psi \to (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)$.

3 Inductie

Ter herinnering, enige regels van de hogere wiskunde: $a^0 = 1$ en voor natuurlijke getallen n geldt $a^{n+1} = a \cdot a^n$ indien $a > 0$. Dus, $3^0 = 1$ en $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. Allereerst drie sommetjes met exponentiatie.

1.) Bereken 2^4.

2.) Bereken $(\frac{1}{2})^4$. Het is inderdaad zo dat $(\frac{1}{2})^n = \frac{1}{2^n}$ voor alle $n \in N$. Dit mag in de rest van deze opgave gebruikt worden.

3.) Voorbeeld: $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$.
Herschrijf zelf $-\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ tot één breuk.

[1] Hint: gebruik twee keer een $\vee$ eliminatie

[2] Hint: als altijd, als je er niet uitkomt begin je aan RAA te denken.

Bewijs nu met inductie dat voor alle natuurlijke getallen n geldt

$$(\frac{1}{2})^0 + \ldots + (\frac{1}{2})^n = 2 - (\frac{1}{2})^n.$$

Denk aan onze mantra!

4 Natuurlijke deductie en volledige inductie

1. Geef een bewijs met natuurlijke deductie voor de formule $(A_0 \wedge A_1) \rightarrow (A_1 \wedge A_0)$.

2. Bewijs dat $\forall n \vdash (A_0 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow (A_n \wedge \ldots \wedge A_0)$. Hier bedoelen we met $\forall n$ de zinsnede "Voor elk natuurlijk getal n". Hint: bezie $(A_0 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge A_{n+1})$ als $((A_0 \wedge \ldots \wedge A_n) \wedge A_{n+1})$.

5 Correctheid

Laat zien dat de volgende formules niet bewijsbaar zijn met natuurlijke deductie.

1. $p_1 \rightarrow (p_0 \rightarrow p_2)$

2. $(p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow (p_0 \vee p_1)$

3. $p_0 \wedge \neg p_1 \rightarrow \neg p_0 \vee p_1$

4. $p_0 \vee \neg p_1 \rightarrow p_0 \wedge p_1$