Logica voor Filosofen
WB1BD4052
2004-2005
Oefenopgaven
Week 7

Docent: Joost J. Joosten

January 13, 2005

1 Gebonden en vrije variabelen

Geef een formule φ in de taal $\{S(x), H(x,y)\}$ zó dat
$\mathsf{FV}(\varphi) = \mathsf{BV}(\varphi) = \{x_{612}\}$.

2 Substitutie

Geef in de volgende formules aan of[1] $(x_2 + x_1)^2$ vrij is voor x_0.

1. $\forall x_3 R(x_1, x_0, x_3) \wedge (x_0 = 6 \rightarrow \exists x_2 P(x_2))$
2. $\exists x_0 R(x_0, x_0, x_0)$
3. $x_0 = (x_2 + x_1)^2 \rightarrow \exists x_3 \forall x_1 R(x_0, x_1, x_3)$
4. $R(x_0, x_1, x_2) \rightarrow \forall x_0 \exists x_1 \exists x_2 R(x_0, x_1, x_{612})$

3 Predicaatlogica en natuurlijke deductie

Bewijs met behulp van natuurlijke deductie de volgende uitspraken.

1. $\vdash \forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\forall x \varphi(x) \rightarrow \forall x \psi(x))$
2. $\vdash \forall x \varphi(x) \rightarrow \neg \forall x \neg \varphi(x)$

[1] Merk op dat we hier, in tegenstelling tot het college, wel functiesymbolen in een term toelaten. Uiteraard verandert dit niets wezenlijks aan de notie van vrij zijn van een term voor een variabele in een formule.

3. $\vdash \exists x\ \varphi(x) \wedge \psi \to \exists x(\varphi(x) \wedge \psi) \quad x \notin \mathsf{FV}(\psi)$
4. $\vdash \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \to \exists x(A(x) \vee B(x))$
5. $\vdash \forall x(\varphi(x) \vee \psi) \to \forall x \varphi(x) \vee \psi \quad x \notin \mathsf{FV}(\psi)$
6. $\vdash (\forall x \varphi(x) \vee \psi) \to \forall x(\varphi(x) \vee \psi) \quad x \notin \mathsf{FV}(\psi)$
7. $\vdash \forall x \varphi(x) \to \neg \exists x \neg \varphi(x)$
8. $\vdash \exists x \neg \varphi(x) \to \neg \forall x \varphi(x)$
9. $\vdash \neg \forall x \varphi(x) \to \exists x \neg \varphi(x)$

4 Predicaatlogica en de volledigheidsstelling

Laat zien dat de volgende uitspraken niet afleidbaar zijn.

1. $\exists x A(x) \to \forall x A(x)$
2. $\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \to (\forall x \varphi(x) \vee \forall x \psi(x))$
3. $\exists x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\exists x \varphi(x) \to \exists x\ \psi(x))$
4. $\exists x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\forall x \varphi(x) \to \forall x \psi(x))$

Geef precies aan waar je de volledigheidsstelling of correctheidsstelling aanroept.

5 Intuïtionisme en bewijzen

Geef intuïtionistische bewijzen met natuurlijke deductie van de volgende propositioneel logische formules.

1. $\neg \varphi \vee \neg \psi \to \neg(\varphi \wedge \psi)$
2. $\neg(\varphi \vee \psi) \to \neg \varphi \wedge \neg \psi$
3. $(\varphi \wedge \neg \varphi) \to \bot$
4. $(\varphi \to \psi) \to (\neg \psi \to \neg \varphi)$

6 Intuïtionisme en de BHK-interpretatie

Geef bij elk van de bovenstaande formules, gebruikmakend van de BHK-interpretatie, een informeel bewijs van de geldigheid ervan.