Logica voor Filosofen
WB1BD4052
2004-2005
Oefenopgaven
Week 4

Docent: Joost J. Joosten

December 9, 2004

Bewijzen met inductie

Bewijs de volgende uitspraken met inductie.

1. $\forall n\ (0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2})$
2. $\forall n\ (\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2})$
3. $\forall n\ (2 + 4 + \ldots + 2 \cdot n = n \cdot (n + 1))$
4. $\forall\, n > 0\ (1 + \ldots + (2 \cdot n - 1) = n^2)$
5. $\forall n\ (p \models (\neg\neg)^n p)$. Hierbij is $(\neg\neg)^n p$ als volgt gedefinieerd: $(\neg\neg)^0 p := p$ en $(\neg\neg)^{n+1} p := \neg\neg(\neg\neg)^n p$.
6. $\forall n\ (p \vdash (\neg\neg)^n p)$

Constructies met bewijzen

Geef (informele) bewijzen voor de volgende uitspraken.

1. Als $\vdash \varphi \wedge \psi$, dan $\vdash \varphi$ en $\vdash \psi$.
2. Als $\vdash \varphi \vee \psi$ en $\vdash \neg\varphi$, dan $\vdash \psi$.
3. Als $\vdash \varphi$ en $\vdash \psi$, dan $\vdash \varphi \wedge \psi$.
4. Als $\vdash \varphi \to \psi$ en $\vdash \neg\psi$, dan ook $\vdash \neg\varphi$.
5. Als $\vdash \varphi \to \neg\varphi$ en $\vdash \neg\varphi \to \varphi$ (dit was onze definitie van paradox!), dan $\vdash \bot$.
6. Als $\vdash \varphi \to \neg\varphi$, dan $\vdash \neg\varphi$.

Inductie en deductie

(A) Laat zien dat $\vdash ((A_0 \vee A_1) \wedge \neg A_0) \to A_1$.

(B) Laat met inductie zien dat voor elk natuurlijk getal n het volgende geldt.
$\vdash ((A_0 \vee \ldots A_{n+1}) \wedge \neg A_0 \wedge \ldots \wedge \neg A_n) \to A_{n+1}$
Hint: met $(A_0 \vee \ldots \vee A_{n+1})$ bedoelen we $((A_0 \vee A_n) \vee A_{n+1})$.