Logica voor Filosofen
WB1BD4052
2004-2005
Eindtentamen

Docent: Joost J. Joosten

Donderdag 17 januari

De puntentelling kan nog veranderd worden maar zal in grote lijnen zijn zoals hieronder aangegeven. Indien U alle opgaven behalve de bonusopgaven goed maakt behaalt U het cijfer 10. De bonusopgave kan worden gebruikt om cijfers net onder 5.5 op te hogen naar een voldoende.

1 Propositielogica

Beslis bij de volgende opgaven of de formule bewijsbaar is of niet. Geef, indien bewijsbaar een bewijs met natuurlijke deductie, en indien niet bewijsbaar, een bewijs dat het niet bewijsbaar is.

1. $(\varphi \to \chi \vee \neg\varphi) \to (\varphi \to \chi)$ (5pt)
2. $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \to \varphi$ (5pt)
3. $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$ (5pt)
4. $(\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi)$ (5pt)

2 Sheffer stroke

We introduceren een nieuw connectief $|$, de zogeheten *Sheffer stroke*. Deze Sheffer stroke is gedefinieerd via zijn waarheidstabel.

p	q	$p\|q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

0. Bereken de waarheidstabel van $(p|p)|q$. (2pt)

In de volgende opgaven is het de bedoeling om de oude connectieven te definiëren met behulp van alleen de Sheffer stroke. Bovendien, mogen we niet meer dan vijf voorkomens van de Sheffer stroke per keer gebruiken. Dus, in de onderstaande opgaven wordt telkens een formule φ gevraagd met de volgende twee eigenschappen.

(A) Het enige connectief dat in φ voorkomt, is de Sheffer stroke $|$.

(B) De Sheffer stroke komt niet meer dan vijf keer voor in φ.

1. Geef een formule $\varphi(p)$ die dezelfde waarheidstabel heeft als $\neg p$ en laat zien dat inderdaad de waarheidstabellen hetzelfde zijn. (3 punten)
2. Geef een formule $\varphi(p, q)$ die dezelfde waarheidstabel heeft als $p \wedge q$ en laat zien dat inderdaad de waarheidstabellen hetzelfde zijn. (5 punten)
3. Geef een formule $\varphi(p, q)$ die dezelfde waarheidstabel heeft als $p \vee q$ en laat zien dat inderdaad de waarheidstabellen hetzelfde zijn. (5 punten)
4. Geef een formule $\varphi(p, q)$ die dezelfde waarheidstabel heeft als $p \to q$ en laat zien dat inderdaad de waarheidstabellen hetzelfde zijn. (5 punten)

3 Natuurlijke deductie en volledige inductie

1. Geef een bewijs voor de volgende formule.

$$\forall x\ \varphi_0(x) \vee \forall x\ \varphi_1(x) \to \forall x\ (\varphi_0(x) \vee \varphi_1(x))\ \text{(5pt)}$$

2. Laat zien dat $\nvdash \forall x\ (\varphi_0(x) \vee \varphi_1(x)) \to \forall x\ \varphi_0(x) \vee \forall x\ \varphi_1(x)$. (5pt)
3. Bewijs dat $\forall n\ \ \vdash \forall x\ \varphi_0(x) \vee \ldots \vee \forall x\ \varphi_n(x) \to \forall x\ (\varphi_0(x) \vee \ldots \vee \varphi_n(x))$. Hier bedoelen we met $\forall n$ de zinsnede "Voor elk natuurlijk getal n". (10pt)

4 Predicaatlogica en natuurlijke deductie

Geef formele bewijzen met natuurlijke deductie voor de volgende zinnen.

1. $\forall x\ (\varphi(x) \vee \psi(x)) \to (\forall x\ (\psi(x) \to \varphi(x)) \to \forall x\ \varphi(x))$ (10pt)
2. $\forall x\ (\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\exists x\ \neg\psi(x) \to \exists x\ \neg\varphi(x))$ (10pt)

5 Contingenties

Laat zien dat de volgende twee uitspraken contingenties zijn.

1. $\forall x\ (R(x,y) \to \neg R(y,x)) \wedge \forall x \exists u \exists v\ (R(x,u) \wedge R(u,v) \wedge R(v,x))$ (10pt)[1]
2. $\forall x\ (R(x,y) \to \neg R(y,x)) \wedge \forall x \exists u \exists v\ (R(x,u) \wedge R(u,v) \wedge R(v,x)) \wedge \forall x \exists u \exists v \exists w\ (R(x,u) \wedge R(u,v) \wedge R(v,w) \wedge R(w,x))$ (10pt)

Bonus 1

Leg in niet meer dan 400 woorden uit waarom Platonisme en Intuïtionisme moeilijk verenigbaar zijn.

Bonus 2

De volgende opgave kon ik zelf niet meteen oplossen, en Lev Beklemishev, Vincent van Oostrom en Albert Visser ook niet. Laat zien dat $\forall x\ (R(x,y) \to \neg R(y,x)) \wedge \forall x \forall y \exists u \exists v\ (R(x,u) \wedge R(u,v) \wedge R(v,y))$ een model heeft of geef een bewijs dat het geen model heeft.

[1] Hint: Deze uitspraak is een conjunctie. Als je R met een pijltje modelleert, zegt het linkerdeel dat pijltjes nooit mogen worden omgedraaid (in het bijzonder mogen punten niet naar zichzelf wijzen). Het rechterdeel zegt dat je vanuit elk punt in drie stappen terug kunt komen.