Huiswerkopdrachten II,
Week 5 & 6

Ulrich Grün, stud.nr.: 9212647

1. **Bewijzen met Induktie**

   (a) i. Te bewijzen: $\forall n\ (0+1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2})$

   ii. Bewijs: met volledige induktie.

   iii. Basis: $n=0 \Rightarrow P_0$ d.w.z. $\frac{0(0+1)}{2}=0$.

   iv. Induktiestap: ik neem aan dat $0+1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.
   Ik wil laten zien dat $P_{n+1} \Rightarrow 0+1+2+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$.
   Induktie hypothese: omdat ik voor $0+1+2+\ldots+n$ kan schrijven: $\frac{n(n+1)}{2}$, levert substitutie het volgende op: $\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=_{(i.h.)}\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$.
   $\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \Rightarrow \frac{(n+1)(n+2)}{2} \Rightarrow \frac{n^2+3n+2}{2} =_{(i.h.)} \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2} \Rightarrow \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \Rightarrow \frac{n^2+3n+2}{2}$. P_n is te bewijzen voor *n+1*, en daarmee $\forall n\ (0+1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2})$.

   v. $\mathcal{Q.E.D}$.

   (b) i. Te bewijzen: $\forall n\ (\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n+2}=\frac{1}{n+2})$

   ii. Bewijs: met volledige induktie.

   iii. Basis: $n=0 \Rightarrow P_0$ d.w.z. $\frac{0+1}{0+2}=\frac{1}{2}=P_0$

   iv. Induktiestappen: Ik ga uit van P_n d.w.z. $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n+2}=\frac{1}{n+2}$.
   Ik wil laten zien dat: P_{n+1} d.w.z. $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{(n+1)+1}{(n+1)+2}=\frac{1}{(n+1)+2}$.
   Induktie hypothese: omdat voor $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n+2}$ kan schrijven: $\frac{1}{n+2}$, levert substitutie het volgende op: $\frac{1}{(n+1)+2} =_{(i.h.)} \frac{1}{n+2}\cdot\frac{(n+1)+1}{(n+1)+2} \Rightarrow \frac{1}{n+3} =_{(i.h.)} \frac{1}{n+2}\cdot\frac{n+2}{n+3} \Rightarrow \frac{n+2}{(n+2)(n+3)} =_{(i.h.)} \frac{1}{n+3} \Rightarrow \frac{n+2}{(n+2)(n+3)} =_{(i.h.)} \frac{n+2}{(n+2)(n+3)}$
   P_n is te bewijzen voor *n+1*, en daarmee $\forall n\ (\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n+2}=\frac{1}{n+2})$.

   v. $\mathcal{Q.E.D}$.

   (c) i. Te bewijzen: $\forall n\ (0+2+4+\ldots+2n=n(n+1))$

ii. Bewijs: met volledige induktie.

iii. Basis: $n = 0 \Rightarrow P_0$ d.w.z. $0(0 + 1) = 0$.

iv. Induktiestap: Ik ga uit van P_n d.w.z. $0 + 2 + 4 + \ldots + 2n = n(n + 1)$.

Ik wil laten zien dat: P_{n+1} d.w.z. $0+2+4+\ldots+2n+2(n+1) = (n + 1)((n + 1) + 1)$.

Induktie hypothese: omdat ik voor $0 + 2 + 4 + \ldots + 2n$ kan schrijven: $n(n + 1)$), levert substitutie het volgende op:

$n(n+1)+2(n+1) =_{(i.h.)} (n+1)((n+1)+1) \Rightarrow n^2+3n+2 =_{(i.h.)} (n + 1)(n + 2) \Rightarrow n^2 + 3n + 2 =_{(i.h.)} n^2 + 3n + 2$

P_n is te bewijzen voor *n+1*, en daarmee $\forall n\ (0+2+4+\ldots+2n = n(n + 1))$.

v. $\mathcal{Q.E.D}$.

(d) i. Te bewijzen: $\forall n > 0\ (1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2)$

ii. Bewijs: met volledige induktie.

iii. Basis: $n = 1 \Rightarrow P_1$ d.w.z. $1^2 = 1$.

iv. Induktiestap: Veronderstelling dat ieder willekeurige getal $n > 0$ eigenschap P heeft. P_n d.w.z. $1+3+\ldots+(2n-1) = n^2$.

Ik wil laten zien dat: P_{n+1} d.w.z. $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$.

Induktiehypothese: omdat ik voor $1 + 3 + \ldots + (2n - 1)$ kan schrijven: n^2, levert substitutie het volgende op:

$n^2 + (2n+1) =_{(i.h.)} (n+1)^2 \Rightarrow n^2+2n+1 =_{(i.h.)} n^2+2n+1$

P_n is te bewijzen voor *n+1*, en daarmee $\forall n > 0\ (1+3+\ldots+(2n - 1) = n^2)$.

v. $\mathcal{Q.E.D}$.

(e) i. Te bewijzen: $\forall n\ (p \models (\neg\neg)^n p)$. Hierbij is $(\neg\neg)^n p$ als volgt gedefinieerd: $(\neg\neg)^0 p := p$ en $(\neg\neg)^{n+1} p := \neg\neg(\neg\neg)^n p$

ii. Bewijs met volledige induxie.

iii. Basis: $n = 0\ (\neg\neg)^0 p = p$.

iv. Induktiestappen: Ik veronderstel $p \models (\neg\neg)^n p$ (Voor n=0 geldt dit).

Ik wil aantonen dat ook $p \models (\neg\neg)^{n+1} p$. $(p \models \neg\neg(\neg\neg)^n p)$

Bewijs: $v((\neg\neg)^n p) = 1$ iff $v(p) = 1$ en $v(\neg\neg(\neg\neg)^n p) = 1$ iff $v(p) = 1$.

P_n is te bewijzen voor *n+1*, en daarmee $\forall n\ (p \models (\neg\neg)^n p)$.

v. $\mathcal{Q.E.D}$.

(f) Te Bewijzen: $\forall n\ (p \vdash (\neg\neg)^n p)$

i. Bewijs: met volledige induktie

ii. Basis: *n=0*, dan geldt $(\neg\neg)^0 p := p$ Verder geldt $(\neg\neg)^{n+1} p = \neg\neg(\neg\neg)^n p$

iii. Induktiestappen: Ik ga uit van $p \vdash (\neg\neg)^n p$,
de induktiehypothese is dat $p \vdash (\neg\neg)^{n+1} p$,
dat dit zo is, ga ik als volgt bewijzen:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix} p \\ \vdots \\ (\neg\neg)^n p \end{matrix} \quad [\neg(\neg\neg)^n p]_1}{\bot} \to E}{\neg\neg(\neg\neg)^n p} \to I_1$$

iv. Zo te zien is $(\neg\neg)^{n+1} p$ ($:= \neg\neg(\neg\neg)^n p$) te bewijzen uit $(\neg\neg)^n p$ en daarmee ook uit p. Hiermee is de aanname bewezen dat $\forall n \ (p \vdash (\neg\neg)^n p)$

v. $\mathcal{Q}.\mathcal{E}.\mathcal{D}.$

2. **Waarheidstafels** $\models \neg(\neg p_0 \wedge \neg p_1) \to p_0 \vee p_1 = 1$

p_0	p_1	$\neg p_0$	$\neg p_1$	$\neg p_0 \wedge \neg p_1$	$\neg(\neg p_0 \wedge \neg p_1)$	$p_0 \vee p_1$	$\neg(\neg p_0 \wedge \neg p_1) \to p_0 \vee p_1$
1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1

3. **Natuurlijke deduktie**

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]_2}{\varphi \vee \psi} \vee I, l \quad [\neg(\varphi \vee \psi)]_1}{\bot} \to E}{\neg\varphi} \to I_2}{\neg(\varphi \vee \psi) \to \neg\varphi} \to I_1$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]_3 \quad [\neg\psi]_4}{\neg\varphi \wedge \neg\psi} \wedge I \quad [\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)]_1}{\bot} \to E}{\psi} RAA_4}{\varphi \vee \psi} \vee I, r \quad [\neg(\varphi \vee \psi)]_2}{\bot} \to E}{\varphi} RAA_3}{\varphi \vee \psi} \vee I, l \quad [\neg(\varphi \vee \psi)]_2}{\bot} \to E}{\varphi \vee \psi} RAA_2}{\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \varphi \vee \psi} \to I_1$$

4. **Konstrukties op bewijzen**

$\vdash (\varphi \vee \neg\varphi) \to \varphi \Rightarrow \vdash \varphi$: $\dfrac{[\varphi \vee \neg\varphi]_1 \quad (\varphi \vee \neg\varphi) \to \varphi}{\varphi} \to E_1$

5. **Natuurlijke deduktie en volledige induktie**

(a) $\vdash A_0 \wedge A_1 \rightarrow A_1 \wedge A_0$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A_0 \wedge A_1}{A_1}\wedge E, r \qquad \dfrac{A_0 \wedge A_1}{A_0}\wedge E, l}{A_1 \wedge A_0}\wedge I}{A_0 \wedge A_1 \rightarrow A_1 \wedge A_0}\rightarrow I_1$$

(b) i. Te bewijzen: $\forall n \in \mathbb{N}\ [\vdash (A_0 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow (A_n \wedge \ldots \wedge A_0)]$ In korte notatie: $\forall n \in \mathbb{N}\ [\vdash \bigwedge_{i=0}^{n} A_i \rightarrow \bigwedge_{n}^{i=0} A_i]$.

ii. Bewijs: met natuurlijke induktie.

iii. Basis: n=0, dus we moeten laten zien $\vdash A_0 \rightarrow A_0$. En inderdaad: $\dfrac{[A_0]_1}{A_0 \rightarrow A_0}\rightarrow I_1$.

iv. Induktiestap: ik neem aan dat $\vdash \bigwedge_{i=0}^{n} A_i \rightarrow \bigwedge_{n}^{i=0} A_i$
Ik laat zien dat dit ook geldt voor: $\vdash \bigwedge_{i=0}^{n} A_i \wedge A_{n+1} \rightarrow A_{n+1} \wedge \bigwedge_{n}^{i=0} A_i$. Omdat te bewijzen ga ik ervan uit dat het voldoende is om $\bigwedge_{i=0}^{n} A_i \wedge A_{n+1} \rightarrow A_{n+1} \wedge \bigwedge_{i=0}^{n} A_i$ te bewijzen. Dit vanwege A_{n+1}, die in de aanname áchter, en in de konklusie vóór de *finite conjunction* ($\bigwedge$) staat. Zou $\nvdash \bigwedge_{i=0}^{n} A_i \rightarrow \bigwedge_{n}^{i=0} A_i$ gelden, dan zou mijn uitgangspunt ook niet te bewijzen zijn.
Here we go:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A_{n+1} \wedge \bigwedge_{i=0}^{n} A_i]_1}{A_{n+1}}\wedge E, r \qquad \dfrac{[A_{n+1} \wedge \bigwedge_{i=0}^{n} A_i]_1}{\bigwedge_{i=0}^{n} A_i}\wedge E, l}{A_{n+1} \wedge \bigwedge_{i=0}^{n} A_i}\wedge I}{\bigwedge_{i=0}^{n} A_i \wedge A_{n+1} \rightarrow A_{n+1} \wedge \bigwedge_{i=0}^{n} A_i}\rightarrow I_1$$

Doordat $\bigwedge_{i=0}^{n} A_i \wedge A_{n+1} \rightarrow A_{n+1} \wedge \bigwedge_{i=0}^{n} A_i$ bewijsbaar is, is $\vdash \bigwedge_{i=0}^{n} A_i \rightarrow \bigwedge_{n}^{i=0} A_i$ dat dus ook en geldt $\forall n \in \mathbb{N}\ [\vdash \bigwedge_{i=0}^{n} A_i \rightarrow \bigwedge_{n}^{i=0} A_i]$.

v. $\mathcal{Q.E.D.}$

6. **Meer induktie en deduktie**

(a) $\vdash (A_0 \vee A_1) \wedge \neg A_0 \rightarrow A_1$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(A_0 \vee A_1) \wedge \neg A_0]_1}{A_0 \vee A_1}\wedge E, l \qquad [A_1]_3 \qquad \dfrac{\dfrac{[A_0]_2 \qquad \dfrac{[(A_0 \vee A_1) \wedge \neg A_0]_1}{\neg A_0}\wedge E, r}{\bot}\rightarrow E}{A_1}\bot E}{A_1}\vee E_{2,3}}{(A_0 \vee A_1) \wedge \neg A_0 \rightarrow A_1}\rightarrow I_1$$

(b)
   i. Te bewijzen: $\forall n \in \mathbb{N}[\vdash (\bigvee_{i=0}^{n} A_i \vee A_{n+1}) \wedge \bigwedge_{i=0}^{n} \neg A_i \rightarrow A_{n+1}]$.
   ii. Bewijs: met natuurlijke induktie.
   iii. Basis: Ik moet laten zien dat het geldt voor *n=0* d.w.z. dat $\vdash (A_0 \vee A_1) \wedge \neg A_0 \rightarrow A_1$. Dit is hetzelfde bewijs als in opgave 6 (a). Dus, voor *n=0* is de formule bewijsbaar.
   iv. Induktiestap: Ik moet nu laten zien, dat het ook geldt voor *n+1*: $\vdash (\bigvee_{i=0}^{n+1} A_i \vee A_{n+2}) \wedge \bigwedge_{i=0}^{n+1} \neg A_i \rightarrow A_{n+2}$:

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{[(\bigvee_{i=0}^{n+1} A_i \vee A_{n+2}) \wedge \bigwedge_{i=0}^{n+1} \neg A_i]_1}{\bigvee_{i=0}^{n+1} A_i \vee A_{n+2}}\;\wedge E, l
    \qquad [A_{n+2}]_3 \qquad
    \dfrac{\dfrac{[\bigvee_{i=0}^{n+1} A_i]_2 \qquad \dfrac{[(\bigvee_{i=0}^{n+1} A_i \vee A_{n+2}) \wedge \bigwedge_{i=0}^{n+1} \neg A_i]_1}{\bigwedge_{i=0}^{n+1} \neg A_i}\;\wedge E, r}{\bot}\;\rightarrow E}{A_{n+2}}\;\bot E
  }{A_{n+2}}\;\vee E_{2,3}
}{(\bigvee_{i=0}^{n+1} A_i \vee A_{n+2}) \wedge \bigwedge_{i=0}^{n+1} \neg A_i \rightarrow A_{n+2}}\;\rightarrow I_1
$$

We kunnen zien dat de formule ook voor *n+1* bewezen kan worden, en daarmee $\forall n \in \mathbb{N}\,[\vdash (\bigvee_{i=0}^{n} A_i \vee A_{n+1}) \wedge \bigwedge_{i=0}^{n} \neg A_i \rightarrow A_{n+1}]$.
   v. $\mathcal{Q}.\mathcal{E}.\mathcal{D}.$