Logica voor Filosofen
WB1BD4052
2004-2005
Oefenopgaven
Week 7 & 8

Docent: Joost J. Joosten

January 19, 2005

1 Valse honden en baasjes

In deze opgaven vindt kwantificatie plaats over de verzameling van honden en mensen. We gebruiken de volgende vertaalsleutel.

$H(x)$	x is een hond
$V(x)$	x is vals
$B(x, y)$	x is het baasje van y

1.1 Vertalingen

Vertaal de volgende zinnen naar predicaatlogische formules.

1. Iedere hond is vals
2. Geen hond is vals
3. Sommige honden zijn vals (er is een hond die vals is)
4. Sommige honden zijn vals en sommige honden zijn niet vals
5. Iedere hond heeft een baasje
6. Sommige honden hebben een baasje (Er zijn honden met een baasje)
7. Ieder is z'n eigen baas
8. Als een hond vals is, dan is z'n baas vals
9. Als een hond vals is, dan is z'n baas een hond

10. De baas van een hond is niet ook een hond
11. Soms is de hond de baas van het baasje
12. Als iemand een valse baas heeft, dan heeft 'ie een hond
13. Als iemand een valse baas heeft, dan heeft 'ie een valse hond
14. Een baasje is nooit een hond
15. Iedere baas is een hond

1.2 Valse honden en baasjes semantiek

Laat zien dat alle bovenstaande zinnen contingenties zijn.

2 Valse honden

In deze opgaven vindt kwantificatie plaats over de verzameling van honden. We gebruiken de volgende vertaalsleutel.

$V(x)$	x is vals
$B(x,y)$	x is het baasje van y

2.1 Vertalingen

Vertaal de volgende zinnen naar predicaatlogische formules.

1. Iedere hond is vals
2. Geen hond is vals
3. Sommige honden zijn vals (er is een hond die vals is)
4. Sommige honden zijn vals en sommige honden zijn niet vals
5. Iedere hond heeft een baasje
6. Sommige honden hebben een baasje (Er zijn honden met een baasje)
7. Ieder is z'n eigen baas
8. Als een hond vals is, dan is z'n baas vals

2.2 Valse honden semantiek

Laat zien dat alle bovenstaande zinnen contingenties zijn.

3 Gebonden en vrije variabelen

Geef een formule φ in de taal $\{S(x), H(x,y)\}$ zó dat
$\mathsf{FV}(\varphi) = \mathsf{BV}(\varphi) = \{x_{612}\}$.

4 Substitutie

Geef in de volgende formules aan of[1] $(x_2 + x_1)^2$ vrij is voor x_0.

1. $\forall x_3 R(x_1, x_0, x_3) \wedge (x_0 = 6 \rightarrow \exists x_2 P(x_2))$
2. $\exists x_0 R(x_0, x_0, x_0)$
3. $x_0 = (x_2 + x_1)^2 \rightarrow \exists x_3 \forall x_1 R(x_0, x_1, x_3)$
4. $R(x_0, x_1, x_2) \rightarrow \forall x_0 \exists x_1 \exists x_2 R(x_0, x_1, x_{612})$

5 Predicaatlogica en natuurlijke deductie

Bewijs met behulp van natuurlijke deductie de volgende uitspraken.

1. $\vdash \forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\forall x \varphi(x) \rightarrow \forall x \psi(x))$
2. $\vdash \forall x \varphi(x) \rightarrow \neg \forall x \neg \varphi(x)$
3. $\vdash \exists x\ \varphi(x) \wedge \psi \rightarrow \exists x(\varphi(x) \wedge \psi) \quad x \notin \mathsf{FV}(\psi)$
4. $\vdash \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \rightarrow \exists x(A(x) \vee B(x))$
5. $\vdash \forall x(\varphi(x) \vee \psi) \rightarrow \forall x \varphi(x) \vee \psi \quad x \notin \mathsf{FV}(\psi)$
6. $\vdash (\forall x \varphi(x) \vee \psi) \rightarrow \forall x(\varphi(x) \vee \psi) \quad x \notin \mathsf{FV}(\psi)$
7. $\vdash \forall x \varphi(x) \rightarrow \neg \exists x \neg \varphi(x)$
8. $\vdash \exists x \neg \varphi(x) \rightarrow \neg \forall x \varphi(x)$
9. $\vdash \neg \forall x \varphi(x) \rightarrow \exists x \neg \varphi(x)$

[1] Merk op dat we hier, in tegenstelling tot het college, wel functiesymbolen in een term toelaten. Uiteraard verandert dit niets wezenlijks aan de notie van vrij zijn van een term voor een variabele in een formule.

6 Predicaatlogica en de volledigheidsstelling

Laat zien dat de volgende uitspraken niet afleidbaar zijn.

1. $\exists x A(x) \rightarrow \forall x A(x)$
2. $\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow (\forall x \varphi(x) \vee \forall x \psi(x))$
3. $\exists x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\exists x \varphi(x) \rightarrow \exists x\ \psi(x))$
4. $\exists x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\forall x \varphi(x) \rightarrow \forall x \psi(x))$

Geef precies aan waar je de volledigheidsstelling of correctheidsstelling aanroept.

7 Deductie en Inductie

Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n het volgende geldt.

$$\vdash \forall x\ (\varphi_0(x) \wedge \ldots \wedge \varphi_n(x)) \rightarrow \forall x\ \varphi_0(x) \wedge \ldots \wedge \forall x\ \varphi_n(x)$$

8 Intuïtionisme en bewijzen

Geef intuïtionistische bewijzen met natuurlijke deductie van de volgende propositioneel logische formules.

1. $\neg\varphi \vee \neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$
2. $\neg(\varphi \vee \psi) \rightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$
3. $(\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \perp$
4. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$

9 Intuïtionisme en de BHK-interpretatie

Geef bij elk van de bovenstaande formules, gebruikmakend van de BHK-interpretatie, een informeel bewijs van de geldigheid ervan.

10 Kripke semantiek

Geef Kripke modellen om te laten zien dat de volgende formules niet afleidbaar zijn in intuitionistische logica.

1. $\varphi \vee \neg\varphi$
2. $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$
3. $\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$

4. $\neg(\varphi \wedge \psi) \to (\neg\varphi \vee \neg\psi)$
5. $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$
6. $(\neg\varphi \to (\psi \vee \chi)) \to ((\neg\varphi \to \psi) \vee (\neg\varphi \to \chi))$
7. $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$
8. $((\psi \to \varphi) \to \varphi) \to \varphi$
9. $(\neg\neg\varphi \to \varphi) \to (\varphi \vee \neg\varphi)$