# Logica voor Filosofen
# WB1BA4052
# 2004-2005
# Oefenopgaven
# Week 3 & 4

Docent: Joost J. Joosten

December 10, 2004

## Semantiek

Bepaal van de volgende formules of het tautologiën zijn of niet.

1. $p \to ((p \to \bot) \to \bot)$
2. $p \to (\neg p \to q)$
3. $p \vee \neg p$
4. $\neg p \vee \neg\neg p$
5. $p \vee q \to (p \to \neg q)$
6. $p \vee q \to (\neg p \to q)$
7. $(p \to (q \vee r)) \to (\neg q \to \neg p \vee r)$
8. $(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$
9. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
10. $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
11. $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

## Natuurlijke deductie

Laat zien dat alle tautologiën hierboven ook bewijsbaar zijn.

## Constructies met bewijzen

Geef (informele) bewijzen voor de volgende uitspraken.

1. Als $\vdash \varphi \wedge \psi$, dan $\vdash \varphi$ en $\vdash \psi$.
2. Als $\vdash \varphi \vee \psi$ en $\vdash \neg\varphi$, dan $\vdash \psi$.
3. Als $\vdash \varphi$ en $\vdash \psi$, dan $\vdash \varphi \wedge \psi$.
4. Als $\vdash \varphi \to \psi$ en $\vdash \neg\psi$, dan ook $\vdash \neg\varphi$.
5. Als $\vdash \varphi \to \neg\varphi$ en $\vdash \neg\varphi \to \varphi$ (dit was onze definitie van paradox!), dan $\vdash \bot$.
6. Als $\vdash \varphi \to \neg\varphi$, dan $\vdash \neg\varphi$.

## Valuaties

We hebben in het colllege gezien hoe een valuatie iets kan zeggen over formules. Want, in eerste instantie zeggen valuaties iets over propositievariabelen. Met behulp van een definitie kunnen we zorgen dat valuaties ook voor formules zijn gedefinieerd. Deze definitie is niet helemaal vrij. Beter gezegd, deze definitie is helemaal niet vrij. Hij moet namelijk precies de berekening van de waarheidstabellen weergeven, waar wij ons met zo veel moeite op hebben vastgelegd.

1. We hebben in college de definitie van $v(\varphi \wedge \psi)$ gegeven als zijnde $v(\varphi) \cdot v(\psi)$. Geef gelijksoorige definities voor de andere connectieven. (Zie ook de notitie op internet hierover.)
2. Zij v gegeven zo dat $v(p) = v(q) = 1$ en $v(r) = 0$. Bereken
   (a) $v(\neg p \vee q \to q \wedge p)$.
   (b) $v(p \to ((p \to \bot) \to \bot))$
   (c) $v(p \to (\neg p \to q))$
   (d) $v(p \vee \neg p)$
   (e) $v(p \vee q \to (p \to \neg q))$
   (f) $v((p \to (q \vee r)) \to (\neg q \to \neg p \vee r))$
   (g) $v((p \to q) \to (\neg p \to \neg q))$
   (h) $v((p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)))$
   (i) $v((p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p))$
   (j) $v((p \to (q \vee r)) \to (\neg q \to \neg p \vee r))$

3. Welke van de twee volgende uitspraken is waar?

$$\models \psi \Leftrightarrow \bot \models \psi$$

$$\models \psi \Leftrightarrow \top \models \psi$$

Geef een bewijs.

4. Bedenk een voorbeeld van een verzameling formules $\Gamma$ en een formule $\varphi$, zo dat $\Gamma$ drie formules bevat, en dat $\Gamma \models \varphi$. Bovendien moet het zo zijn dat het niet zo is dat $\Gamma' \models \varphi$ voor welke $\Gamma' \subset \Gamma$ dan ook. Geef een bewijs dat $\Gamma \models \varphi$.

## Semantiek en Deductie

Bewijs de volgende uitspraken.

1. $\neg(p \to q) \models (q \to p)$
2. $\neg(p \to q) \vdash (q \to p)$
3. $\vdash \neg(p \to q) \to (q \to p)$
4. $\models \neg(p \to q) \to (q \to p)$
5. $p \models \neg\neg p$
6. $p \vdash \neg\neg p$
7. $\models p \to \neg\neg p$
8. $\vdash p \to \neg\neg p$
9. $\models (p \to q) \vee (q \to p)$
10. $\vdash (p \to q) \vee (q \to p)$
11. $\neg p \vee q \models p \to q$
12. $\neg p \vee q \vdash p \to q$
13. $\models (\neg p \vee q) \to (p \to q)$
14. $\vdash (\neg p \vee q) \to (p \to q)$