Logica 1

Joost J. Joosten

Universiteit Utrecht

(sub)faculteit der Wijsbegeerte

Heidelberglaan 8

3584 CS Utrecht

Kamer 158, 030-2535579

jjoosten@phil.uu.nl

`www.phil.uu.nl/ jjoosten` (hier moet een tilde bij)

Vandaag

- Positiebepaling: waar staan we?

Vandaag

- Positiebepaling: waar staan we?
- Inductie: hoe en waarom?

Vandaag

- Positiebepaling: waar staan we?
- Inductie: hoe en waarom?
- Correctheidsstelling

Vandaag

- Positiebepaling: waar staan we?
- Inductie: hoe en waarom?
- Correctheidsstelling
- Gevolgen van de correctheidsstelling:

Vandaag

- Positiebepaling: waar staan we?
- Inductie: hoe en waarom?
- Correctheidsstelling
- Gevolgen van de correctheidsstelling:
  $\nvdash \varphi$

Waar staan we?

- Missie: geldig redeneren

Waar staan we?

- Missie: geldig redeneren
- Inductie

Waar staan we?

- Missie: geldig redeneren
- Inductie
- Waarheidstabellen

Waar staan we?

- Missie: geldig redeneren
- Inductie
- Waarheidstabellen
- Correctheidsstelling

Universele uitspraken

- Hoe kunnen we universele uitspraken bewijzen?

Universele uitspraken

- Hoe kunnen we universele uitspraken bewijzen?
- Niet?

Universele uitspraken

- Hoe kunnen we universele uitspraken bewijzen?
- Niet?
- Een socioloog, een fysicus en een filosoof zitten in de trans-Sibirische express . . .

Universele uitspraken

- Als we extra informatie over het *domein* weten

Universele uitspraken

- Als we extra informatie over het *domein* weten
- Bijvoorbeeld: als Dolly en Polly (homozygoot) zwart zijn, en

Universele uitspraken

- Als we extra informatie over het *domein* weten
- Bijvoorbeeld: als Dolly en Polly (homozygoot) zwart zijn, en
- als Dolly en Polly de voorouders zijn van alle Russische schapen, en

Universele uitspraken

- Als we extra informatie over het *domein* weten
- Bijvoorbeeld: als Dolly en Polly (homozygoot) zwart zijn, en
- als Dolly en Polly de voorouders zijn van alle Russische schapen, en
- als zwart een dominant fenotype is,

Universele uitspraken

- Als we extra informatie over het *domein* weten
- Bijvoorbeeld: als Dolly en Polly (homozygoot) zwart zijn, en
- als Dolly en Polly de voorouders zijn van alle Russische schapen, en
- als zwart een dominant fenotype is,
- dan zijn alle Russische schapen zwart!

Universele uitspraken

- Als we extra informatie over het *domein* weten
- Bijvoorbeeld: als Dolly en Polly (homozygoot) zwart zijn, en
- als Dolly en Polly de voorouders zijn van alle Russische schapen, en
- als zwart een dominant fenotype is,
- dan zijn alle Russische schapen zwart!
- Dit is volledige inductie!

Inductie

- Makkelijkste voorbeeld van Inductie: getallen

Inductie

- Makkelijkste voorbeeld van Inductie: getallen
- Denk aan dominostenen!

Inductie

- Makkelijkste voorbeeld van Inductie: getallen
- Denk aan dominostenen! (Of aan Dolly en Polly. . .)

Inductie Mantra

- We beschouwen inductie voor natuurlijke getallen

Inductie Mantra

- We beschouwen inductie voor natuurlijke getallen
- Te bewijzen: $\forall n \; P(n)$

Inductie Mantra

- We beschouwen inductie voor natuurlijke getallen
- Te bewijzen: $\forall n \; P(n)$
- Bewijs:

Inductie Mantra

- We beschouwen inductie voor natuurlijke getallen
- Te bewijzen: $\forall n \; P(n)$
- Bewijs: met volledige inductie.

Inductie Mantra

- We beschouwen inductie voor natuurlijke getallen
- Te bewijzen: $\forall n\ P(n)$
- Bewijs: met volledige inductie.
- Basis, n=0

Inductie Mantra

- We beschouwen inductie voor natuurlijke getallen
- Te bewijzen: $\forall n \; P(n)$
- Bewijs: met volledige inductie.
- Basis, n=0 Wegens blablabla zien we dat inderdaad $P(0)$
- Inductiestap

Inductie Mantra

- We beschouwen inductie voor natuurlijke getallen
- Te bewijzen: $\forall n \; P(n)$
- Bewijs: met volledige inductie.
- Basis, n=0 Wegens blablabla zien we dat inderdaad $P(0)$
- Inductiestap
  We gaan er van uit dat n eigenschap P heeft, dwz, $P(n)$

Inductie Mantra

- We beschouwen inductie voor natuurlijke getallen
- Te bewijzen: $\forall n \; P(n)$
- Bewijs: met volledige inductie.
- Basis, n=0 Wegens blablabla zien we dat inderdaad $P(0)$
- Inductiestap
  We gaan er van uit dat n eigenschap P heeft, dwz, $P(n)$
  We willen inzien dat $n+1$ ook eigenschap P heeft

Inductie Mantra

- We beschouwen inductie voor natuurlijke getallen
- Te bewijzen: $\forall n\ P(n)$
- Bewijs: met volledige inductie.
- Basis, n=0 Wegens blablabla zien we dat inderdaad $P(0)$
- Inductiestap
  We gaan er van uit dat n eigenschap P heeft, dwz, $P(n)$
  We willen inzien dat $n+1$ ook eigenschap P heeft
  en wegens blablabla is dit zo

Inductie Mantra

- We beschouwen inductie voor natuurlijke getallen
- Te bewijzen: $\forall n\ P(n)$
- Bewijs: met volledige inductie.
- Basis, n=0 Wegens blablabla zien we dat inderdaad $P(0)$
- Inductiestap
  We gaan er van uit dat n eigenschap P heeft, dwz, $P(n)$
  We willen inzien dat $n+1$ ook eigenschap P heeft
  en wegens blablabla is dit zo
- Q.E.D.

Voorbeelden en de Mantra

- Gauss

Voorbeelden en de Mantra

- Gauss
- Torens van Hanoi

Inductieprincipes

- Slogan: iedere inductief gedefinieerde verzameling heeft zijn eigen inductie principe.

Inductieprincipes

- Slogan: iedere inductief gedefinieerde verzameling heeft zijn eigen inductie principe.
- Voorbeeld: formule inductie

Inductieprincipes

- Slogan: iedere inductief gedefinieerde verzameling heeft zijn eigen inductie principe.
- Voorbeeld: formule inductie
  - Als alle atomaire formules eigenschap P hebben

Inductieprincipes

- Slogan: iedere inductief gedefinieerde verzameling heeft zijn eigen inductie principe.
- Voorbeeld: formule inductie
  - Als alle atomaire formules eigenschap P hebben
  - Als P behouden blijft onder het samenstellen met connectieven

Inductieprincipes

- Slogan: iedere inductief gedefinieerde verzameling heeft zijn eigen inductie principe.
- Voorbeeld: formule inductie
  - Als alle atomaire formules eigenschap P hebben
  - Als P behouden blijft onder het samenstellen met connectieven
  - Dan hebben alle formules eigenschap P.

Inductieprincipes

- Slogan: iedere inductief gedefinieerde verzameling heeft zijn eigen inductie principe.
- Voorbeeld: formule inductie
  - Als alle atomaire formules eigenschap P hebben
  - Als P behouden blijft onder het samenstellen met connectieven
    - Als $P(\varphi)$ en $P(\psi)$, dan $P((\varphi \wedge \psi))$

  - Dan hebben alle formules eigenschap P.

Inductieprincipes

- Slogan: iedere inductief gedefinieerde verzameling heeft zijn eigen inductie principe.
- Voorbeeld: formule inductie
  - Als alle atomaire formules eigenschap P hebben
  - Als P behouden blijft onder het samenstellen met connectieven
    - Als $P(\varphi)$ en $P(\psi)$, dan $P((\varphi \wedge \psi))$
    - Als $P(\varphi)$ en $P(\psi)$, dan $P((\varphi \vee \psi))$

  - Dan hebben alle formules eigenschap P.

Inductieprincipes

- Slogan: iedere inductief gedefinieerde verzameling heeft zijn eigen inductie principe.
- Voorbeeld: formule inductie
  - Als alle atomaire formules eigenschap P hebben
  - Als P behouden blijft onder het samenstellen met connectieven
    - Als $P(\varphi)$ en $P(\psi)$, dan $P((\varphi \wedge \psi))$
    - Als $P(\varphi)$ en $P(\psi)$, dan $P((\varphi \vee \psi))$
    - Als $P(\varphi)$ en $P(\psi)$, dan $P((\varphi \rightarrow \psi))$

  - Dan hebben alle formules eigenschap P.

Inductieprincipes

- Slogan: iedere inductief gedefinieerde verzameling heeft zijn eigen inductie principe.
- Voorbeeld: formule inductie
  - Als alle atomaire formules eigenschap P hebben
  - Als P behouden blijft onder het samenstellen met connectieven
    - Als $P(\varphi)$ en $P(\psi)$, dan $P((\varphi \wedge \psi))$
    - Als $P(\varphi)$ en $P(\psi)$, dan $P((\varphi \vee \psi))$
    - Als $P(\varphi)$ en $P(\psi)$, dan $P((\varphi \rightarrow \psi))$
    - Als $P(\psi)$, dan $P(\neg\psi)$
  - Dan hebben alle formules eigenschap P.

Inductieprincipes

We kunnen nu de indrukwekkende stelling bewijzen dat elke formule een even aantal haakjes heeft.

Inductieprincipes

- Je moet gegeven een inductieve definitie het corresponderende inductie principe kunnen formuleren

Inductieprincipes

- Je moet gegeven een inductieve definitie het corresponderende inductie principe kunnen formuleren
- Bijvoorbeeld
  - $\dagger \in \Sigma$
  - Als $x \in \Sigma$, dan $\oplus x \in \Sigma$

Inductieprincipes

- Je moet gegeven een inductieve definitie het corresponderende inductie principe kunnen formuleren
- Bijvoorbeeld
  - $\dagger \in \Sigma$
  - Als $x \in \Sigma$, dan $\oplus x \in \Sigma$
- Bijbehorend inductieprincipe:

Inductieprincipes

- Je moet gegeven een inductieve definitie het corresponderende inductie principe kunnen formuleren
- Bijvoorbeeld
  - $\dagger \in \Sigma$
  - Als $x \in \Sigma$, dan $\oplus x \in \Sigma$
- Bijbehorend inductieprincipe:
  $P(\dagger) \wedge \forall x \; (P(x) \Rightarrow P(\oplus x)) \Rightarrow \forall x \; P(x)$

Bewijzen

- Bewijzen zijn ook inductief gedefinieerd

Bewijzen

- Bewijzen zijn ook inductief gedefinieerd
- Dus, er is een inductieprincipe voor bewijzen

Bewijzen en Inductie

- Te Bewijzen: Ieder bewijs heeft eigenschap P

Bewijzen en Inductie

- Te Bewijzen: Ieder bewijs heeft eigenschap P
- Bewijs: met volledige inductie (over bewijzen).

Bewijzen en Inductie

- Te Bewijzen: Ieder bewijs heeft eigenschap P
- Bewijs: met volledige inductie (over bewijzen).
  - Basis:

Bewijzen en Inductie

- Te Bewijzen: Ieder bewijs heeft eigenschap P
- Bewijs: met volledige inductie (over bewijzen).
  - Basis: Ieder (atomair) bewijs φ heeft eigenschap P

Bewijzen en Inductie

- Te Bewijzen: Ieder bewijs heeft eigenschap P
- Bewijs: met volledige inductie (over bewijzen).
  - Basis: Ieder (atomair) bewijs φ heeft eigenschap P
  - Inductiestap:

Bewijzen en Inductie

- Te Bewijzen: Ieder bewijs heeft eigenschap P
- Bewijs: met volledige inductie (over bewijzen).
  - Basis: Ieder (atomair) bewijs φ heeft eigenschap P
  - Inductiestap: (De eigenschap P blijft behouden onder het maken van nieuwe bewijzen)

Bewijzen en Inductie

- Te Bewijzen: Ieder bewijs heeft eigenschap P
- Bewijs: met volledige inductie (over bewijzen).
  - Basis: Ieder (atomair) bewijs φ heeft eigenschap P
  - Inductiestap: (De eigenschap P blijft behouden onder het maken van nieuwe bewijzen)

    Stel dat $\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\end{array}$ heeft eigenschap P en stel dat $\begin{array}{c}\mathcal{D}'\\ \psi\end{array}$ heeft eigenschap P.

Bewijzen en Inductie

- Te Bewijzen: Ieder bewijs heeft eigenschap P
- Bewijs: met volledige inductie (over bewijzen).
  - Basis: Ieder (atomair) bewijs φ heeft eigenschap P
  - Inductiestap: (De eigenschap P blijft behouden onder het maken van nieuwe bewijzen)

    Stel dat $\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\end{array}$ heeft eigenschap P en stel dat $\begin{array}{c}\mathcal{D}'\\ \psi\end{array}$ heeft eigenschap P.

    We willen dat $\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D} & \mathcal{D}'\\ \varphi & \psi\end{array}}{\varphi \wedge \psi}\wedge\mathrm{I}$ eigenschap P heeft.

Bewijzen en Inductie

- Te Bewijzen: Ieder bewijs heeft eigenschap P
- Bewijs: met volledige inductie (over bewijzen).
  - Basis: Ieder (atomair) bewijs φ heeft eigenschap P
  - Inductiestap: (De eigenschap P blijft behouden onder het maken van nieuwe bewijzen)

    Stel dat $\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi\end{matrix}$ heeft eigenschap P en stel dat $\begin{matrix}\mathcal{D}'\\ \psi\end{matrix}$ heeft eigenschap P.

    We willen dat $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi\end{matrix} \quad \begin{matrix}\mathcal{D}'\\ \psi\end{matrix}}{\varphi \wedge \psi} \wedge\mathrm{I}$ eigenschap P heeft.
    blablabla

Bewijzen en Inductie

- Te Bewijzen: Ieder bewijs heeft eigenschap P
- Bewijs: met volledige inductie (over bewijzen).
  - Basis: Ieder (atomair) bewijs φ heeft eigenschap P
  - Inductiestap: (De eigenschap P blijft behouden onder het maken van nieuwe bewijzen)

    Stel dat $\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\end{array}$ heeft eigenschap P en stel dat $\begin{array}{c}\mathcal{D}'\\ \psi\end{array}$ heeft eigenschap P.

    We willen dat $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}'\\ \psi\end{array}}{\varphi \wedge \psi} \wedge\mathrm{I}$ eigenschap P heeft.
    blablabla
- Q.E.D.

Correctheidsstelling

- $\Gamma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \varphi$

Correctheidsstelling

- $\Gamma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \varphi$
- Te bewijzen: voor elke derivatie $\mathcal{D}$ hebben we dat $A(\mathcal{D}) \vdash C(\mathcal{D})$.

Correctheidsstelling

- $\Gamma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \varphi$
- Te bewijzen: voor elke derivatie $\mathcal{D}$ hebben we dat $A(\mathcal{D}) \vdash C(\mathcal{D})$.
  Hierbij is $A(\mathcal{D})$ de verzameling aannames in $\mathcal{D}$ en $C(\mathcal{D})$ de conclusie van $\mathcal{D}$.

Correctheidsstelling

- $\Gamma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \varphi$
- Te bewijzen: voor elke derivatie $\mathcal{D}$ hebben we dat $A(\mathcal{D}) \vdash C(\mathcal{D})$.
  Hierbij is $A(\mathcal{D})$ de verzameling aannames in $\mathcal{D}$ en $C(\mathcal{D})$ de conclusie van $\mathcal{D}$.
- Bewijs: met volledige inductie (over bewijzen).

Correctheidsstelling

- $\Gamma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \varphi$
- Te bewijzen: voor elke derivatie $\mathcal{D}$ hebben we dat $A(\mathcal{D}) \vdash C(\mathcal{D})$.
  Hierbij is $A(\mathcal{D})$ de verzameling aannames in $\mathcal{D}$ en $C(\mathcal{D})$ de conclusie van $\mathcal{D}$.
- Bewijs: met volledige inductie (over bewijzen).
  bla

Correctheidsstelling

- $\Gamma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \varphi$
- Te bewijzen: voor elke derivatie $\mathcal{D}$ hebben we dat $A(\mathcal{D}) \vdash C(\mathcal{D})$.
  Hierbij is $A(\mathcal{D})$ de verzameling aannames in $\mathcal{D}$ en $C(\mathcal{D})$ de conclusie van $\mathcal{D}$.
- Bewijs: met volledige inductie (over bewijzen).
  bla
  bla

Correctheidsstelling

- $\Gamma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \varphi$
- Te bewijzen: voor elke derivatie $\mathcal{D}$ hebben we dat $A(\mathcal{D}) \vdash C(\mathcal{D})$.
  Hierbij is $A(\mathcal{D})$ de verzameling aannames in $\mathcal{D}$ en $C(\mathcal{D})$ de conclusie van $\mathcal{D}$.
- Bewijs: met volledige inductie (over bewijzen).
  bla
  bla
  bla

Correctheidsstelling

- $\Gamma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \varphi$
- Te bewijzen: voor elke derivatie $\mathcal{D}$ hebben we dat $A(\mathcal{D}) \vdash C(\mathcal{D})$.
  Hierbij is $A(\mathcal{D})$ de verzameling aannames in $\mathcal{D}$ en $C(\mathcal{D})$ de conclusie van $\mathcal{D}$.
- Bewijs: met volledige inductie (over bewijzen).
  bla
  bla
  bla
- Q.E.D.

Gevolgen

- Hoe te beslissen $\not\models \psi$?

Gevolgen

- Hoe te beslissen $\not\models \psi$?
- Beslisbaarheid? (mechanische zoekprocedure (calculemus))

Inductie en Deductie

- Combinatie van Technieken

Inductie en Deductie

- Combinatie van Technieken
- Voor alle natuurlijke getallen n geldt:
  $\vdash (A \to (B_0 \wedge \ldots \wedge B_n)) \to (A \to B_0) \wedge \ldots (A \to B_n)$