Logica 1

Joost J. Joosten

Universiteit Utrecht

(sub)faculteit der Wijsbegeerte

Heidelberglaan 8

3584 CS Utrecht

Kamer 158, 030-2535579

jjoosten@phil.uu.nl

`www.phil.uu.nl/ jjoosten` (hier moet een tilde bij)

Mededelingen

- Extra werkcollege

Mededelingen

- Extra werkcollege
- Gastcollege van Dalen

Vandaag

- Syntax predicatenlogica een beetje preciseren

Vandaag

- Syntax predicatenlogica een beetje preciseren
- Semantiek (modellen) predicatenlogica bestuderen

Vandaag

- Syntax predicatenlogica een beetje preciseren
- Semantiek (modellen) predicatenlogica bestuderen
- Deductie en predicatenlogica

Vandaag

- Syntax predicatenlogica een beetje preciseren
- Semantiek (modellen) predicatenlogica bestuderen
- Deductie en predicatenlogica
- Begin Intuïtionistische Logica

Syntax

- We werken altijd met een fragment [a] van volle predicatenlogica

Syntax

- We werken altijd met een fragment van volle predicatenlogica (denk aan prop. logica en alleen werken met de variabelen p_0, p_1)

Syntax

- We werken altijd met een fragment van volle predicatenlogica (denk aan prop. logica en alleen werken met de variabelen p_0, p_1)
- Er zijn symbolen voor variabelen (en mogelijk ook voor constanten)

Syntax

- We werken altijd met een fragment van volle predicatenlogica (denk aan prop. logica en alleen werken met de variabelen p_0, p_1)
- Er zijn symbolen voor variabelen (en mogelijk ook voor constanten)
- Er zijn hulpsymbolen zoals haakjes en komma's

Syntax

- We werken altijd met een fragment van volle predicatenlogica (denk aan prop. logica en alleen werken met de variabelen p_0, p_1)
- Er zijn symbolen voor variabelen (en mogelijk ook voor constanten)
- Er zijn hulpsymbolen zoals haakjes en komma's
- Er zijn symbolen voor predicaten

Syntax

- We werken altijd met een fragment van volle predicatenlogica (denk aan prop. logica en alleen werken met de variabelen p_0, p_1)
- Er zijn symbolen voor variabelen (en mogelijk ook voor constanten)
- Er zijn hulpsymbolen zoals haakjes en komma's
- Er zijn symbolen voor predicaten
- Er zijn symbolen voor logische connectieven

Syntax

- We werken altijd met een fragment van volle predicatenlogica (denk aan prop. logica en alleen werken met de variabelen p_0, p_1)
- Er zijn symbolen voor variabelen (en mogelijk ook voor constanten)
- Er zijn hulpsymbolen zoals haakjes en komma's
- Er zijn symbolen voor predicaten
- Er zijn symbolen voor logische connectieven
- Er zijn symbolen voor quantoren (worden soms ook tot de connectieven gerekend)

Syntax

- We werken altijd met een fragment van volle predicatenlogica (denk aan prop. logica en alleen werken met de variabelen p_0, p_1)
- Er zijn symbolen voor variabelen (en mogelijk ook voor constanten)
- Er zijn hulpsymbolen zoals haakjes en komma's
- Er zijn symbolen voor predicaten
- Er zijn symbolen voor logische connectieven
- Er zijn symbolen voor quantoren (worden soms ook tot de connectieven gerekend)
- Gegeven een aantal predicaten, dan is de verzameling van predicaatlogische formules wederom inductief gedefinieerd

Nomenclatuur

- Vrije en gebonden variabelen

Nomenclatuur

- Vrije en gebonden variabelen
- Zinnen en formules

Nomenclatuur

- Vrije en gebonden variabelen
- Zinnen en formules
  termen

Nomenclatuur

- Vrije en gebonden variabelen
- Zinnen en formules
  termen
- Substitutie;

Nomenclatuur

- Vrije en gebonden variabelen
- Zinnen en formules
  termen
- Substitutie; Voorbeeld: $\forall y\ H(x, y)[\mathsf{j}/x]$

Nomenclatuur

- Vrije en gebonden variabelen
- Zinnen en formules
  termen
- Substitutie; Voorbeeld: $\forall y \; H(x, y)[\mathrm{j}/x]$
- t is vrij voor x in φ

Nomenclatuur

- Vrije en gebonden variabelen
- Zinnen en formules
  termen
- Substitutie; Voorbeeld: $\forall y\ H(x, y)[\mathrm{j}/x]$
- t is vrij voor x in φ ; Voorbeeld: $\exists y(x \neq y)$

Semantiek

- Voor een fragment van de predicatenlogica kunnen we een model specificeren

Semantiek

- Voor een fragment van de predicatenlogica kunnen we een model specificeren
- Dit model bestaat uit een tweetal ingrediënten

Semantiek

- Voor een fragment van de predicatenlogica kunnen we een model specificeren
- Dit model bestaat uit een tweetal ingrediënten
  - Domein

Semantiek

- Voor een fragment van de predicatenlogica kunnen we een model specificeren
- Dit model bestaat uit een tweetal ingrediënten
  - Domein (universum)

Semantiek

- Voor een fragment van de predicatenlogica kunnen we een model specificeren
- Dit model bestaat uit een tweetal ingrediënten
  - Domein (universum)
  - Interpretatie van de betreffende predicaten symbolen

Semantiek

- Voor een fragment van de predicatenlogica kunnen we een model specificeren
- Dit model bestaat uit een tweetal ingrediënten
  - Domein (universum)
  - Interpretatie van de betreffende predicaten symbolen, relaties op het domein

Semantiek

- Voor een fragment van de predicatenlogica kunnen we een model specificeren
- Dit model bestaat uit een tweetal ingrediënten
  - Domein (universum)   Niet leeg!
  - Interpretatie van de betreffende predicaten symbolen, relaties op het domein

Modellen

- In modellen geven we alle elementen uit het domein een unieke naam

Modellen

- In modellen geven we alle elementen uit het domein een unieke naam
- $\mathcal{A} \models \varphi$

Modellen

- In modellen geven we alle elementen uit het domein een unieke naam
- $\mathcal{A} \models \varphi$ (Lemma 2.4.5. uit L&S); Tarski's waarheidsdefinitie

Modellen

- In modellen geven we alle elementen uit het domein een unieke naam
- $\mathcal{A} \models \varphi$ (Lemma 2.4.5. uit L&S); Tarski's waarheidsdefinitie
- $\models \varphi$

Modellen

- In modellen geven we alle elementen uit het domein een unieke naam
- $\mathcal{A} \models \varphi$ (Lemma 2.4.5. uit L&S); Tarski's waarheidsdefinitie
- $\models \varphi$ tautologie

Modellen

- In modellen geven we alle elementen uit het domein een unieke naam
- $\mathcal{A} \models \varphi$ (Lemma 2.4.5. uit L&S); Tarski's waarheidsdefinitie
- $\models \varphi$ tautologie
- contingenties en valsheden

Identiteit

- Meestal veronderstellen we dat we identiteit (=) als predicaat hebben

Identiteit

- Meestal veronderstellen we dat we identiteit (=) als predicaat hebben
- Er is iemand die alleen van zichzelf houdt

Identiteit

- Meestal veronderstellen we dat we identiteit (=) als predicaat hebben
- Er is iemand die alleen van zichzelf houdt
- Iedereen houdt van tenminste twee mensen

Identiteit

- Meestal veronderstellen we dat we identiteit (=) als predicaat hebben
- Er is iemand die alleen van zichzelf houdt
- Iedereen houdt van tenminste twee mensen
- Wederom, semantiek

Redeneren met quantificatie

- We kunnen universele uitspraken instantiëren

Redeneren met quantificatie

- We kunnen universele uitspraken instantiëren
- Voorbeeld:

Redeneren met quantificatie

- We kunnen universele uitspraken instantiëren
- Voorbeeld: $\forall x \; (M(x) \rightarrow S(x))$

Redeneren met quantificatie

- We kunnen universele uitspraken instantiëren
- Voorbeeld: $\forall x\ (M(x) \rightarrow S(x))$
- Via een instantiatie komen we tot:

Redeneren met quantificatie

- We kunnen universele uitspraken instantiëren
- Voorbeeld: $\forall x\ (M(x) \rightarrow S(x))$
- Via een instantiatie komen we tot: $M(\mathsf{s}) \rightarrow S(\mathsf{s})$

Redeneren met quantificatie

- We kunnen universele uitspraken instantiëren
- Voorbeeld: $\forall x\ (M(x) \to S(x))$
- Via een instantiatie komen we tot: $M(\mathsf{s}) \to S(\mathsf{s})$
- En wegens

Redeneren met quantificatie

- We kunnen universele uitspraken instantiëren
- Voorbeeld: $\forall x\ (M(x) \rightarrow S(x))$
- Via een instantiatie komen we tot: $M(\mathsf{s}) \rightarrow S(\mathsf{s})$
- En wegens $M(\mathsf{s})$

Redeneren met quantificatie

- We kunnen universele uitspraken instantiëren
- Voorbeeld: $\forall x\ (M(x) \rightarrow S(x))$
- Via een instantiatie komen we tot: $M(\mathsf{s}) \rightarrow S(\mathsf{s})$
- En wegens $M(\mathsf{s})$
- krijgen we via Modus Ponens, $S(\mathsf{s})$

Predicatenlogica

- Aristoteles heeft een zeer beperkt deel van de predicaten logica in kaart gebracht met zijn syllogismen.

Predicatenlogica

- Aristoteles heeft een zeer beperkt deel van de predicaten logica in kaart gebracht met zijn syllogismen.
- Wij zullen een grotere en betere kaart maken

Redeneren met quantoren

- Universele kwantor : ,

Redeneren met quantoren

- Universele kwantor : elimantie ,

Redeneren met quantoren

- Universele kwantor : elimantie (instantiatie) ,

Redeneren met quantoren

- Universele kwantor : elimantie (instantiatie) , introductie

Redeneren met quantoren

- Universele kwantor : elimantie (instantiatie) , introductie (generalisatie)

Redeneren met quantoren

- Universele kwantor : elimantie (instantiatie) , introductie (generalisatie)
- Existentiële kwantor

,

Redeneren met quantoren

- Universele kwantor : elimantie (instantiatie) , introductie (generalisatie)
- Existentiële kwantor elimantie

,

Redeneren met quantoren

- Universele kwantor : elimantie (instantiatie) , introductie (generalisatie)
- Existentiële kwantor elimantie (via een soort assumptie) ,

Redeneren met quantoren

- Universele kwantor : elimantie (instantiatie) , introductie (generalisatie)
- Existentiële kwantor elimantie (via een soort assumptie) , introductie

Redeneren met quantoren

- Universele kwantor : elimantie (instantiatie) , introductie (generalisatie)
- Existentiële kwantor elimantie (via een soort assumptie) , introductie (wegens een instantie)

Voorbeelden

- $\forall x \forall y\ \varphi(x, y) \to \forall y \forall x \varphi(x, y)$

Voorbeelden

- $\forall x \forall y\ \varphi(x,y) \to \forall y \forall x \varphi(x,y)$ Met $\varphi(x,y)$ bedoelen we een formule φ, waar x en y als vrije variabelen in voorkomen

Voorbeelden

- $\forall x \forall y \; \varphi(x, y) \rightarrow \forall y \forall x \varphi(x, y)$ Met $\varphi(x, y)$ bedoelen we een formule φ, waar x en y als vrije variabelen in voorkomen
- $\forall x \; (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \forall x \; \varphi \wedge \forall x \; \psi$

Voorbeelden

- $\forall x \forall y\ \varphi(x,y) \rightarrow \forall y \forall x \varphi(x,y)$ Met $\varphi(x,y)$ bedoelen we een formule φ, waar x en y als vrije variabelen in voorkomen
- $\forall x\ (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \forall x\ \varphi \wedge \forall x\ \psi$ Merk op: we geven niet altijd de variabelen weer!

Voorbeelden

- $\forall x \forall y\ \varphi(x,y) \to \forall y \forall x \varphi(x,y)$ Met $\varphi(x,y)$ bedoelen we een formule φ, waar x en y als vrije variabelen in voorkomen
- $\forall x\ (\varphi \wedge \psi) \to \forall x\ \varphi \wedge \forall x\ \psi$ Merk op: we geven niet altijd de variabelen weer!
- Als $x \notin \mathrm{FV}(\varphi)$, dan $\forall x\ (\varphi \to \psi(x)) \to (\varphi \to \forall x\ \psi(x))$

Voorbeelden

- $\forall x \forall y\ \varphi(x,y) \to \forall y \forall x \varphi(x,y)$ Met $\varphi(x,y)$ bedoelen we een formule φ, waar x en y als vrije variabelen in voorkomen

- $\forall x\ (\varphi \wedge \psi) \to \forall x\ \varphi \wedge \forall x\ \psi$ Merk op: we geven niet altijd de variabelen weer!
- Als $x \notin \mathrm{FV}(\varphi)$, dan $\forall x\ (\varphi \to \psi(x)) \to (\varphi \to \forall x\ \psi(x))$
- Als $x \notin \mathrm{FV}(\psi)$, dan $\forall x\ (\varphi(x) \to \psi) \to (\exists x\ \varphi(x) \to \psi)$

Voorbeelden

- $\forall x \forall y\ \varphi(x,y) \to \forall y \forall x \varphi(x,y)$ Met $\varphi(x,y)$ bedoelen we een formule φ, waar x en y als vrije variabelen in voorkomen

- $\forall x\ (\varphi \wedge \psi) \to \forall x\ \varphi \wedge \forall x\ \psi$ Merk op: we geven niet altijd de variabelen weer!
- Als $x \notin \mathrm{FV}(\varphi)$, dan $\forall x\ (\varphi \to \psi(x)) \to (\varphi \to \forall x\ \psi(x))$
- Als $x \notin \mathrm{FV}(\psi)$, dan $\forall x\ (\varphi(x) \to \psi) \to (\exists x\ \varphi(x) \to \psi)$
- $\exists x\ (\varphi(x) \vee \psi(x)) \to \exists x\ \varphi(x) \vee \exists x\ \psi(x)$

Eigenschappen kaart

- Correctheid

Eigenschappen kaart

- Correctheid
- Volledigheid

Eigenschappen kaart

- Correctheid
- Volledigheid
- Onbeslisbaarheid!

Intuïtionisme

- Vaak ook wel constructivisme genoemd

Intuïtionisme

- Vaak ook wel constructivisme genoemd
- Existentiële uitspraken kunnen slechts wegens een instantiatie worden aangetoond

Intuïtionisme

- Vaak ook wel constructivisme genoemd
- Existentiële uitspraken kunnen slechts wegens een instantiatie worden aangetoond
- Evidentie voor proposities wordt gegeven door bewijzen.

Intuïtionisme

- Vaak ook wel constructivisme genoemd
- Existentiële uitspraken kunnen slechts wegens een instantiatie worden aangetoond
- Evidentie voor proposities wordt gegeven door bewijzen.
- Wij maken bewijzen. Dus wij creëren evidentie.

Intuïtionisme

- Vaak ook wel constructivisme genoemd
- Existentiële uitspraken kunnen slechts wegens een instantiatie worden aangetoond
- Evidentie voor proposities wordt gegeven door bewijzen.
- Wij maken bewijzen. Dus wij creëren evidentie.
- Dus wij creëren proposities:

Intuïtionisme

- Vaak ook wel constructivisme genoemd
- Existentiële uitspraken kunnen slechts wegens een instantiatie worden aangetoond
- Evidentie voor proposities wordt gegeven door bewijzen.
- Wij maken bewijzen. Dus wij creëren evidentie.
- Dus wij creëren proposities: geen Platonisme!

Deductie

- Gentzen's deductie systeem geeft constructief redeneren weer! (Prawitz)

Deductie

- Gentzen's deductie systeem geeft constructief redeneren weer! (Prawitz)
- Behalve RAA

Intuïtionisme

- Wat zijn tautologiën voor constructivisten?

Intuïtionisme

- Wat zijn tautologiën voor constructivisten?
- Herinterpretatie van de logische connectieven

Intuïtionisme

- Wat zijn tautologiën voor constructivisten?
- Herinterpretatie van de logische connectieven
- De Brouwer-Heyting-Kolmogorov Interpretatie

Intuïtionisme

- Wat zijn tautologiën voor constructivisten?
- Herinterpretatie van de logische connectieven
- De Brouwer-Heyting-Kolmogorov Interpretatie
- Voorbeeld: $\varphi \wedge \psi \to \varphi$ is een tautologie

Dit college

- Belangrijkste doelstellingen van dit college

Dit college

- Belangrijkste doelstellingen van dit college
- Het kunnen modelleren van gekwantificeerde uitspraken m.b.v. eerste orde predicaten logica

Dit college

- Belangrijkste doelstellingen van dit college
- Het kunnen modelleren van gekwantificeerde uitspraken m.b.v. eerste orde predicaten logica
- Het specificeren van modellen (semantiek) voor fragmenten van eerste orde predicaten logica

Dit college

- Belangrijkste doelstellingen van dit college
- Het kunnen modelleren van gekwantificeerde uitspraken m.b.v. eerste orde predicaten logica
- Het specificeren van modellen (semantiek) voor fragmenten van eerste orde predicaten logica
- Het maken van afleidingen in natuurlijke deductie van predicaatlogische uitspraken

Dit college

- Belangrijkste doelstellingen van dit college
- Het kunnen modelleren van gekwantificeerde uitspraken m.b.v. eerste orde predicaten logica
- Het specificeren van modellen (semantiek) voor fragmenten van eerste orde predicaten logica
- Het maken van afleidingen in natuurlijke deductie van predicaatlogische uitspraken
- Informele bewijzen mbv de BHK-interpretatie geven van propositioneel logische tautologiën