# Voortgezette Logica
# 2005-2006
# Tussentoets

Docent: Joost J. Joosten

May 22, 2006

**Abstract**

Schrijf je naam, collegekaartnummer en of je het vak op niveau 2 of 3 volgt op je antwoorden. Geef ook aan of je het vak in de voltijd of in de deeltijd volgt. De antwoorden moeten voor dinsdag ochtend 30 mei, 9:00 ingeleverd zijn bij het onderwijsbureau van de subfaculteit der Wijsbegeerte of persoonlijk bij Joost bijvoorbeeld bij aanvang van het hoorcollege.

## Natuurlijke deductie

Geef bewijzen met natuurlijke deductie van de volgende formules. Uiteraard, gebruik je in je bewijzen voor formules van propositielogica alleen de regels voor propositielogica. Bij modale formules mogen uiteraard ook de twee regels voor de modaliteiten worden gebruikt en bij predicatenlogica de regels voor de kwantoren.

1. $((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$
2. $\forall x\ (\psi \to \varphi(x)) \leftrightarrow (\psi \to \forall x\ \varphi(x)) \quad x \notin \mathsf{FV}(\psi)$
3. $\Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$
4. $\Diamond A \wedge \Box B \to \Diamond(A \wedge B)$
5. $(p \to q) \vee (q \to p)$
6. $\varphi \vee \varphi \to \varphi \wedge \varphi$
7. $\exists x\ \varphi(x) \vee \exists y\ \varphi(y) \leftrightarrow \exists z\ \varphi(z)$

## Intuïtionisme

Leg uit wat de bezwaren van een intuïtionist zijn bij het accepteren van

$$(p \to q) \vee (q \to p).$$

Vergelijk deze met de bezwaren van Lewis. Vermeld gebruikte bronnen.

## Semantiek

Voor elke logica die we hebben behandeld hebben we een notie van semantiek gedefinieerd. Vervolgens gebruikten we die semantiek om de notie *tautologie* te definiëren. In onderstaande voorbeelden, gebruik de juiste semantische notie om te laten zien dat de formule in kwestie geen tautologie is.

1. $(p \to q) \to (q \to p)$
2. $(\forall x\ \varphi(x) \to \psi) \to \forall x\ (\varphi(x) \to \psi) \qquad x \notin \mathsf{FV}(\psi)$
3. $\exists x\ (\varphi(x) \to \psi) \to (\exists x\ \varphi(x) \to \psi) \qquad x \notin \mathsf{FV}(\psi)$
4. $\Box(p \to q) \vee \Box(q \to p)$
5. $\Box p \to \Box\Box p$
6. $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$
7. $\Box(p \wedge \Box p \to q) \vee \Box(\Box q \to p)$

## Semantieken vergelijken

Bewijs de volgende stelling.

> Als $\varphi$ geen propositioneel logische tautologie is, dan is $\Box\varphi$ geen modaal logische tautologie.

## Uitroeptekens

We hebben natuurlijke deductie systemen gedefinieerd voor propositie-, predicaten- en modale logica. Enkele regels mogen we alleen toepassen indien aan zekere voorwaarden is voldaan. Dat we hebben gecontroleerd dat aan de voorwaarden is voldaan geven we altijd aan met een uitroeptekentje achter de omschrijving van de regel. In deze opgave is het de bedoeling om bij de regels die een uitroepteken hebben de precieze omschrijving van de voorwaarde te geven.

We beschouwen bijvoorbeeld de $\exists\mathsf{E}$ regel:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \exists x\ \varphi(x)\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\varphi(x)]^1\\ \mathcal{D}'\\ \psi\end{array}}{\psi}\ \exists\mathsf{E}, 1!$$

Het uitroepteken is hier een afkorting voor de volgende zinsnede.

> De variabele $x$ komt niet vrij voor $\psi$ en bovendien zijn er geen open aannamen meer in $\mathcal{D}'$ waar $x$ vrij in voorkomt.

1. Geef alle regels waarbij een voorwaarde moet worden gecontroleerd en geef per regel een nauwkeurige omschrijving van deze voorwaarden.

2. Deze opgave hoeft alleen gemaakt te worden door studenten die het vak op niveau 3 volgen.

   Het is nu de bedoeling om te laten zien dat deze voorwaarden echt nodig zijn. Geef bij iedere regel (inclusief $\exists\mathsf{E}$) een voorbeeld van een bewijs die een toepassing van die regel bevat waarbij niet aan de voorwaarden is voldaan, zodat de conclusie van het bewijs onwaar is. Let op, je moet hier dus een bewijs bedenken die de regel fout toepast en vervolgens laten zien dat de conclusie niet waar is.