Voortgezette Logica, Week 6

Joost J. Joosten

Universiteit Utrecht

(sub)faculteit der Wijsbegeerte

Heidelberglaan 8

3584 CS Utrecht

Kamer 164, 030-2535575

jjoosten@phil.uu.nl

`www.phil.uu.nl/~jjoosten`

Tussentoets en daarna

- Week 6, Paper 1, Huiswerk

Tussentoets en daarna

- Week 6, Paper 1, Huiswerk
- Week 7, Paper 2, Protopaper + 2 keer review

Tussentoets en daarna

- Week 6, Paper 1, Huiswerk
- Week 7, Paper 2, Protopaper + 2 keer review
- Opzet nu: Proto-paper inleveren voor maandag 17:00 bij Els in pdf of plain text

Tussentoets en daarna

- Week 6, Paper 1, Huiswerk
- Week 7, Paper 2, Protopaper + 2 keer review
- Opzet nu: Proto-paper inleveren voor maandag 17:00 bij Els in pdf of plain text
- Review: twee dagen de tijd! (en een halve dag)

Tussentoets en daarna

- Week 6, Paper 1, Huiswerk
- Week 7, Paper 2, Protopaper + 2 keer review
- Opzet nu: Proto-paper inleveren voor maandag 17:00 bij Els in pdf of plain text
- Review: twee dagen de tijd! (en een halve dag)
- Week 8, Huiswerk

Gödel's lecture

- Kurt Gödel, April 26 1906, Januari 14 1978

Gödel's lecture

- Kurt Gödel, April 26 1906, Januari 14 1978
- Een van de grondleggers van de moderne logica

Gödel's lecture

- Kurt Gödel, April 26 1906, Januari 14 1978
- Een van de grondleggers van de moderne logica
- Wij lezen een verslag van een lezing van hem

Gödel's lecture

- Kurt Gödel, April 26 1906, Januari 14 1978
- Een van de grondleggers van de moderne logica
- Wij lezen een verslag van een lezing van hem
- Over: grondslagen van de wiskunde

Gödel's lecture

- Kurt Gödel, April 26 1906, Januari 14 1978
- Een van de grondleggers van de moderne logica
- Wij lezen een verslag van een lezing van hem
- Over: grondslagen van de wiskunde
- Om te beginnen enige achtergrond over zijn beroemde *onvolledigheidsstelling*

De onvolledigheidsstelling

- Eerst de volledigheidsstelling

De onvolledigheidsstelling

- Eerst de volledigheidsstelling
- $\models$ spreekt over waarheid in alle modellen

De onvolledigheidsstelling

- Eerst de volledigheidsstelling
- $\models$ spreekt over waarheid in alle modellen
- Het wordt moeilijk als we $\mathbb{N} \models \ldots$ beschouwen.

De onvolledigheidsstelling

- Eerst de volledigheidsstelling
- $\models$ spreekt over waarheid in alle modellen
- Het wordt moeilijk als we $\mathbb{N} \models \ldots$ beschouwen.
- Neem een bewijssysteem dat $\mathbb{N}$ beschrijft

De onvolledigheidsstelling

- Eerst de volledigheidsstelling
- $\models$ spreekt over waarheid in alle modellen
- Het wordt moeilijk als we $\mathbb{N} \models \ldots$ beschouwen.
- Neem een bewijssysteem dat $\mathbb{N}$ beschrijft
- Dit is nooit volledig

De onvolledigheidsstelling

- Eerst de volledigheidsstelling
- $\models$ spreekt over waarheid in alle modellen
- Het wordt moeilijk als we $\mathbb{N} \models \ldots$ beschouwen.
- Neem een bewijssysteem dat $\mathbb{N}$ beschrijft
- Dit is nooit volledig
- Voor een willekeurig systeem

De onvolledigheidsstelling

- Eerst de volledigheidsstelling
- $\models$ spreekt over waarheid in alle modellen
- Het wordt moeilijk als we $\mathbb{N} \models \ldots$ beschouwen.
- Neem een bewijssysteem dat $\mathbb{N}$ beschrijft
- Dit is nooit volledig
- Voor een willekeurig systeem
- (Church-Turing these)

Bewijsschets

- Via coderen kunnen we syntax in rekenkunde weergeven

Bewijsschets

- Via coderen kunnen we syntax in rekenkunde weergeven
- Via een slim zogeheten diagonaal lemma, kan ook zelfreferentie worden nagespeeld

Bewijsschets

- Via coderen kunnen we syntax in rekenkunde weergeven
- Via een slim zogeheten diagonaal lemma, kan ook zelfreferentie worden nagespeeld
- $\lambda \leftrightarrow \neg \mathsf{Bew}(\ulcorner \lambda \urcorner)$

Bewijsschets

- Via coderen kunnen we syntax in rekenkunde weergeven
- Via een slim zogeheten diagonaal lemma, kan ook zelfreferentie worden nagespeeld
- $\lambda \leftrightarrow \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \lambda \urcorner)$
- Als bewijsbaar dan niet, dus niet...

Bewijsschets

- Via coderen kunnen we syntax in rekenkunde weergeven
- Via een slim zogeheten diagonaal lemma, kan ook zelfreferentie worden nagespeeld
- $\lambda \leftrightarrow \neg \mathsf{Bew}(\ulcorner \lambda \urcorner)$
- Als bewijsbaar dan niet, dus niet...
- Overigens, als negatie bewijsbaar dan niet, dus niet...

Bewijsschets

- Via coderen kunnen we syntax in rekenkunde weergeven
- Via een slim zogeheten diagonaal lemma, kan ook zelfreferentie worden nagespeeld
- $\lambda \leftrightarrow \neg \mathsf{Bew}(\ulcorner \lambda \urcorner)$
- Als bewijsbaar dan niet, dus niet...
- Overigens, als negatie bewijsbaar dan niet, dus niet...
- Als een consistente theorie een beetje rekenkunde heeft , dan heeft die theorie een onafhankelijke Gödelzin.

Bewijsschets

- Via coderen kunnen we syntax in rekenkunde weergeven
- Via een slim zogeheten diagonaal lemma, kan ook zelfreferentie worden nagespeeld
- $\lambda \leftrightarrow \neg \mathsf{Bew}(\ulcorner \lambda \urcorner)$
- Als bewijsbaar dan niet, dus niet...
- Overigens, als negatie bewijsbaar dan niet, dus niet...
- Als een consistente theorie een beetje rekenkunde heeft en RE is , dan heeft die theorie een onafhankelijke Gödelzin.

Filosofische repercussies

- Voor de duidelijkheid, we hebben Gödel 1 en Gödel 2

Filosofische repercussies

- Voor de duidelijkheid, we hebben Gödel 1 en Gödel 2
- Gödel 1: Voor elke consistente RE theorie T met een minimum aan rekenkunde bestaat er een ware uitspraak die niet door T wordt bewezen

Filosofische repercussies

- Voor de duidelijkheid, we hebben Gödel 1 en Gödel 2
- Gödel 1: Voor elke consistente RE theorie T met een minimum aan rekenkunde bestaat er een ware uitspraak die niet door T wordt bewezen
- Gödel 2: Voor elke consistente RE theorie T met een minimum aan rekenkunde is het zo dat T zijn eigen consistentie niet bewijst

Filosofische repercussies

- Voor de duidelijkheid, we hebben Gödel 1 en Gödel 2
- Gödel 1: Voor elke consistente RE theorie T met een minimum aan rekenkunde bestaat er een ware uitspraak die niet door T wordt bewezen
- Gödel 2: Voor elke consistente RE theorie T met een minimum aan rekenkunde is het zo dat T zijn eigen consistentie niet bewijst (althans, een intentionele en structurele codificatie (interpretatie) van consistentie)

Filosofische repercussies

- Wegens de Church-Turing these, valt een RE theorie te bezien als de output van een Turing machine

Filosofische repercussies

- Wegens de Church-Turing these, valt een RE theorie te bezien als de output van een Turing machine
- Sommige auteurs concluderen zonder meer dat uit de onvolledigheidsstellingen volgt dat mensen superieur zijn aan computers (Nagel & Newman, Lucas, Penrose)

Filosofische repercussies

- Wegens de Church-Turing these, valt een RE theorie te bezien als de output van een Turing machine
- Sommige auteurs concluderen zonder meer dat uit de onvolledigheidsstellingen volgt dat mensen superieur zijn aan computers (Nagel & Newman, Lucas, Penrose)
- Gödel is in zijn *Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications* een stukje voorzichtiger

Basic Theorems...

- Lecture/paper bestaat uit twee delen

Basic Theorems...

- Lecture/paper bestaat uit twee delen
- Deel 1: enkele stellingen en filosofische repercussies

Basic Theorems...

- Lecture/paper bestaat uit twee delen
- Deel 1: enkele stellingen en filosofische repercussies
- Deel 2: pleidooi voor conceptueel realisme, ofwel Platonisme

Basic Theorems...

- Lecture/paper bestaat uit twee delen
- Deel 1: enkele stellingen en filosofische repercussies
- Deel 2: pleidooi voor conceptueel realisme, ofwel Platonisme
- Gödel gelooft in de *onuitputtelijkheid* van wiskunde

Basic Theorems...

- Lecture/paper bestaat uit twee delen
- Deel 1: enkele stellingen en filosofische repercussies
- Deel 2: pleidooi voor conceptueel realisme, ofwel Platonisme
- Gödel gelooft in de *onuitputtelijkheid* van wiskunde
- Niet-completeerbaarheid

Basic Theorems...

- Lecture/paper bestaat uit twee delen
- Deel 1: enkele stellingen en filosofische repercussies
- Deel 2: pleidooi voor conceptueel realisme, ofwel Platonisme
- Gödel gelooft in de *onuitputtelijkheid* van wiskunde
- Niet-completeerbaarheid
- Enige argumenten hiervoor baseert hij op de onuitputtelijkheid van de iteratieve notie van verzameling

Verzamelingenleer

- In de negentiende eeuw steeds meer tendens naar rigiditeit

Verzamelingenleer

- In de negentiende eeuw steeds meer tendens naar rigiditeit
- Cantor en verzamelingen (CH)

Verzamelingenleer

- In de negentiende eeuw steeds meer tendens naar rigiditeit
- Cantor en verzamelingen (CH)
- Cardinaliteit van alle verzamelingen?

Verzamelingenleer

- In de negentiende eeuw steeds meer tendens naar rigiditeit
- Cantor en verzamelingen (CH)
- Cardinaliteit van alle verzamelingen?
- Frege, logicisme, Begriffsschrift

Verzamelingenleer

- In de negentiende eeuw steeds meer tendens naar rigiditeit
- Cantor en verzamelingen (CH)
- Cardinaliteit van alle verzamelingen?
- Frege, logicisme, Begriffsschrift
- Russell: Frege is inconsistent

Verzamelingenleer

- In de negentiende eeuw steeds meer tendens naar rigiditeit
- Cantor en verzamelingen (CH)
- Cardinaliteit van alle verzamelingen?
- Frege, logicisme, Begriffsschrift
- Russell: Frege is inconsistent
- Zermelo Fraenkel

Verzamelingenleer

- In de negentiende eeuw steeds meer tendens naar rigiditeit
- Cantor en verzamelingen (CH)
- Cardinaliteit van alle verzamelingen?
- Frege, logicisme, Begriffsschrift
- Russell: Frege is inconsistent
- Zermelo Fraenkel
- Continuum probleem:

Verzamelingenleer

- In de negentiende eeuw steeds meer tendens naar rigiditeit
- Cantor en verzamelingen (CH)
- Cardinaliteit van alle verzamelingen?
- Frege, logicisme, Begriffsschrift
- Russell: Frege is inconsistent
- Zermelo Fraenkel
- Continuum probleem: blijkt onafhankelijk van ZF(C)

Verzamelingen en waarheid

- In hoeverre kunnen we stellingen over verzamelingen bewijzen

Verzamelingen en waarheid

- In hoeverre kunnen we stellingen over verzamelingen bewijzen
- Waarom zijn verzamelingen belangrijk?

Verzamelingen en waarheid

- In hoeverre kunnen we stellingen over verzamelingen bewijzen
- Waarom zijn verzamelingen belangrijk? (Gouden standaard)

Verzamelingen en waarheid

- In hoeverre kunnen we stellingen over verzamelingen bewijzen
- Waarom zijn verzamelingen belangrijk? (Gouden standaard)
- Gödel spreekt over onuitputtelijkheid van het verzamelingsbegrip

Verzamelingen en waarheid

- In hoeverre kunnen we stellingen over verzamelingen bewijzen
- Waarom zijn verzamelingen belangrijk? (Gouden standaard)
- Gödel spreekt over onuitputtelijkheid van het verzamelingsbegrip
- Iteratief argument: "langs alle ordinalen"

Verzamelingen en waarheid

- In hoeverre kunnen we stellingen over verzamelingen bewijzen
- Waarom zijn verzamelingen belangrijk? (Gouden standaard)
- Gödel spreekt over onuitputtelijkheid van het verzamelingsbegrip
- Iteratief argument: "langs alle ordinalen"
- Closure properties, voor "elke" operator

Verzamelingen en waarheid

- In hoeverre kunnen we stellingen over verzamelingen bewijzen
- Waarom zijn verzamelingen belangrijk? (Gouden standaard)
- Gödel spreekt over onuitputtelijkheid van het verzamelingsbegrip
- Iteratief argument: "langs alle ordinalen"
- Closure properties, voor "elke" operator
- Na elke closure property kun je axiomas opschrijven die de structuur beschrijven

Iteratie

- Met nieuwe axiomas kun je weer meer closure operaties beschrijven etc

Iteratie

- Met nieuwe axiomas kun je weer meer closure operaties beschrijven etc
- Hiermee maakt Gödel aannemelijk dat er nooit een simpele (laat staan eindige) rij axiomas komt

Iteratie

- Met nieuwe axiomas kun je weer meer closure operaties beschrijven etc
- Hiermee maakt Gödel aannemelijk dat er nooit een simpele (laat staan eindige) rij axiomas komt
- Interessant en belangrijk punt is het volgende

Iteratie

- Met nieuwe axiomas kun je weer meer closure operaties beschrijven etc
- Hiermee maakt Gödel aannemelijk dat er nooit een simpele (laat staan eindige) rij axiomas komt
- Interessant en belangrijk punt is het volgende
- Closure properties hebben gevolgen voor diophantische vergelijlkingen!