Voortgezette Logica, Week 2

Joost J. Joosten

Universiteit Utrecht

(sub)faculteit der Wijsbegeerte

Heidelberglaan 8

3584 CS Utrecht

Kamer 164, 030-2535575

jjoosten@phil.uu.nl

`www.phil.uu.nl/ jjoosten` (hier moet een tilde bij)

Vragen?

- Constructies met bewijzen

Vragen?

- Constructies met bewijzen
- Verdere vragen?

Semantiek predicatenlogica

- Een model $\mathcal{M}$ voor een bepaald vocabularium bestaat uit een paar $\langle M, I \rangle$

Semantiek predicatenlogica

- Een model $\mathcal{M}$ voor een bepaald vocabularium bestaat uit een paar $\langle M, I \rangle$
- Hier is M het domein van $\mathcal{M}$, de objecten waar onze objectvariabelen naar verwijze.

Semantiek predicatenlogica

- Een model $\mathcal{M}$ voor een bepaald vocabularium bestaat uit een paar $\langle M, I \rangle$
- Hier is M het domein van $\mathcal{M}$, de objecten waar onze objectvariabelen naar verwijze. Bv, "iedereen", verwijst naar alle mensen.

Semantiek predicatenlogica

- Een model $\mathcal{M}$ voor een bepaald vocabularium bestaat uit een paar $\langle M, I \rangle$
- Hier is M het domein van $\mathcal{M}$, de objecten waar onze objectvariabelen naar verwijze. Bv, "iedereen", verwijst naar alle mensen.
- I is een interpretatie

Semantiek predicatenlogica

- Een model $\mathcal{M}$ voor een bepaald vocabularium bestaat uit een paar $\langle M, I \rangle$
- Hier is M het domein van $\mathcal{M}$, de objecten waar onze objectvariabelen naar verwijze. Bv, "iedereen", verwijst naar alle mensen.
- I is een interpretatie
- Als R bv een tweeplaatsig relatiesymbool is, dan is $I(R)$ een binaire relatie, dat is, $I(R) \subseteq M \times M$

Semantiek predicatenlogica

- Een model $\mathcal{M}$ voor een bepaald vocabularium bestaat uit een paar $\langle M, I \rangle$
- Hier is M het domein van $\mathcal{M}$, de objecten waar onze objectvariabelen naar verwijze. Bv, "iedereen", verwijst naar alle mensen.
- I is een interpretatie
- Als R bv een tweeplaatsig relatiesymbool is, dan is $I(R)$ een binaire relatie, dat is, $I(R) \subseteq M \times M$
- We laten het onderscheid tussen M en $\mathcal{M}$ vaak achterwege

Semantiek predicatenlogica

- Een model $\mathcal{M}$ voor een bepaald vocabularium bestaat uit een paar $\langle M, I \rangle$
- Hier is M het domein van $\mathcal{M}$, de objecten waar onze objectvariabelen naar verwijze. Bv, "iedereen", verwijst naar alle mensen.
- I is een interpretatie
- Als R bv een tweeplaatsig relatiesymbool is, dan is $I(R)$ een binaire relatie, dat is, $I(R) \subseteq M \times M$
- We laten het onderscheid tussen M en $\mathcal{M}$ vaak achterwege
- Let op: dit is een iets kortere (en (op deze slides) iets minder uitgewerkte) beschrijving dan van Dalen en zijn similarity types en structures daarvoor

Pred. Logica

- $M \models \psi(x)$ heeft zonder specificatie van x nog geen betekenis

Pred. Logica

- $M \models \psi(x)$ heeft zonder specificatie van x nog geen betekenis
- Wederom valuaties, maar dan nu voor pred. logica

Pred. Logica

- $M \models \psi(x)$ heeft zonder specificatie van x nog geen betekenis
- Wederom valuaties, maar dan nu voor pred. logica
- Van Dalen gebruikt dit niet

Pred. Logica

- $M \models \psi(x)$ heeft zonder specificatie van x nog geen betekenis
- Wederom valuaties, maar dan nu voor pred. logica
- Van Dalen gebruikt dit niet
- Voor *zinnen* is $M \models \psi$ wel betekenisvol

Pred. Logica

- $M \models \psi(x)$ heeft zonder specificatie van x nog geen betekenis
- Wederom valuaties, maar dan nu voor pred. logica
- Van Dalen gebruikt dit niet
- Voor *zinnen* is $M \models \psi$ wel betekenisvol
- De betekenis wordt gegeven door Tarski's waarheidsdefinitie

Pred. Logica

- $M \models \psi(x)$ heeft zonder specificatie van x nog geen betekenis
- Wederom valuaties, maar dan nu voor pred. logica
- Van Dalen gebruikt dit niet
- Voor *zinnen* is $M \models \psi$ wel betekenisvol
- De betekenis wordt gegeven door Tarski's waarheidsdefinitie
- Om deze te formuleren staan we (tijdelijk) alle objecten van M toe als constanten in onze taal

Pred. Logica

- $M \models \psi(x)$ heeft zonder specificatie van x nog geen betekenis
- Wederom valuaties, maar dan nu voor pred. logica
- Van Dalen gebruikt dit niet
- Voor *zinnen* is $M \models \psi$ wel betekenisvol
- De betekenis wordt gegeven door Tarski's waarheidsdefinitie
- Om deze te formuleren staan we (tijdelijk) alle objecten van M toe als constanten in onze taal
- Bv $M \models \forall x \; \varphi(x)$ iff. voor elke $a \in M$ geldt $M \models \varphi(x/\overline{a})$

Pred. Logica

- $M \models \psi(x)$ heeft zonder specificatie van x nog geen betekenis
- Wederom valuaties, maar dan nu voor pred. logica
- Van Dalen gebruikt dit niet
- Voor *zinnen* is $M \models \psi$ wel betekenisvol
- De betekenis wordt gegeven door Tarski's waarheidsdefinitie
- Om deze te formuleren staan we (tijdelijk) alle objecten van M toe als constanten in onze taal
- Bv $M \models \forall x\ \varphi(x)$ iff. voor elke $a \in M$ geldt $M \models \varphi(x/\overline{a})$ Iets andere substitutienotatie dan in vD. Merk overigens op dat $\overline{a}$ is een naam voor a

Pred. Logica

- $M \models \psi(x)$ heeft zonder specificatie van x nog geen betekenis
- Wederom valuaties, maar dan nu voor pred. logica
- Van Dalen gebruikt dit niet
- Voor *zinnen* is $M \models \psi$ wel betekenisvol
- De betekenis wordt gegeven door Tarski's waarheidsdefinitie
- Om deze te formuleren staan we (tijdelijk) alle objecten van M toe als constanten in onze taal
- Bv $M \models \forall x\ \varphi(x)$ iff. voor elke $a \in M$ geldt $M \models \varphi(x/\overline{a})$ Iets andere substitutienotatie dan in vD. Merk overigens op dat $\overline{a}$ is een naam voor a
- NB zeer subtiel spel tussen object-taal en meta-taal

Voorbeelden

- Iedereen houdt van iedereen

Voorbeelden

- Iedereen houdt van iedereen
- Niemand houdt van niemand

Voorbeelden

- Iedereen houdt van iedereen
- Niemand houdt van niemand
- Niemand houdt van iedereen

Voorbeelden

- Iedereen houdt van iedereen
- Niemand houdt van niemand
- Niemand houdt van iedereen
- Dit zijn contingenties dus ze "hebben" modellen en tegenmodellen

Voorbeelden

- Iedereen houdt van iedereen
- Niemand houdt van niemand
- Niemand houdt van iedereen
- Dit zijn contingenties dus ze "hebben" modellen en tegenmodellen
- Als iemand van iedereen houdt, houdt hij/zij ook van zichzelf

Volledigheid Ped. Logica

- Goedel’s volledigheidsstelling

Volledigheid Ped. Logica

- Goedel's volledigheidsstelling
- We hebben dus een manier om niet afleidbaarheid te concluderen

Volledigheid Ped. Logica

- Goedel's volledigheidsstelling
- We hebben dus een manier om niet afleidbaarheid te concluderen
- Als we modellen tekenen, dan worden binaire relaties pijltjes (hogere ariteiten zullen we niet tekenen maar beschrijven)

Volledigheid Ped. Logica

- Goedel's volledigheidsstelling
- We hebben dus een manier om niet afleidbaarheid te concluderen
- Als we modellen tekenen, dan worden binaire relaties pijltjes (hogere ariteiten zullen we niet tekenen maar beschrijven)
- Echter, pred. logica is *onbeslisbaar* (whatever that may be...)

Modale logica

- Redeneren beschrijven waar modaliteiten bij betrokken zijn

Modale logica

- Redeneren beschrijven waar modaliteiten bij betrokken zijn
- Mogelijk/verplicht/toekomstig

Modale logica

- Redeneren beschrijven waar modaliteiten bij betrokken zijn
- Mogelijk/verplicht/toekomstig
- Reeds sinds Aristoteles

Modale logica

- Redeneren beschrijven waar modaliteiten bij betrokken zijn
- Mogelijk/verplicht/toekomstig
- Reeds sinds Aristoteles
- Moderne interesse gewekt in eerste instantie wegens Lewis 1912; *Implication and the algebra of logic*

Modale logica

- Redeneren beschrijven waar modaliteiten bij betrokken zijn
- Mogelijk/verplicht/toekomstig
- Reeds sinds Aristoteles
- Moderne interesse gewekt in eerste instantie wegens Lewis 1912; *Implication and the algebra of logic*
- "paradoxen" van materiële implicatie

Modale logica

- Redeneren beschrijven waar modaliteiten bij betrokken zijn
- Mogelijk/verplicht/toekomstig
- Reeds sinds Aristoteles
- Moderne interesse gewekt in eerste instantie wegens Lewis 1912; *Implication and the algebra of logic*
- "paradoxen" van materiële implicatie
- Maan is van groene kaas $\rightarrow$ Jan K. is geen vrijgezel

Modale logica

- Redeneren beschrijven waar modaliteiten bij betrokken zijn
- Mogelijk/verplicht/toekomstig
- Reeds sinds Aristoteles
- Moderne interesse gewekt in eerste instantie wegens Lewis 1912; *Implication and the algebra of logic*
- "paradoxen" van materiële implicatie
- Maan is van groene kaas $\rightarrow$ Jan K. is geen vrijgezel
- Als Katrijn getrouwd is met Jan K. $\rightarrow$ Jan K. is geen vrijgezel

Modale logica

- Strikte implicatie heeft een smaak van noodzakelijkheid

Modale logica

- Strikte implicatie heeft een smaak van noodzakelijkheid
- Rare fonts in de reader: bv $\$$ moet zijn $\Box$ en U' moet zijn $\Diamond$

Modale logica

- Strikte implicatie heeft een smaak van noodzakelijkheid
- Rare fonts in de reader: bv $\$$ moet zijn $\Box$ en U' moet zijn $\Diamond$
- Modale logica is bloeiend, er zijn ook vele toepassingen

Modale logica

- Strikte implicatie heeft een smaak van noodzakelijkheid
- Rare fonts in de reader: bv $\$$ moet zijn $\Box$ en U' moet zijn $\Diamond$
- Modale logica is bloeiend, er zijn ook vele toepassingen
- Bv tijdlogica in redeneren in AI

Modale logica

- Strikte implicatie heeft een smaak van noodzakelijkheid
- Rare fonts in de reader: bv $\$$ moet zijn $\Box$ en U' moet zijn $\Diamond$
- Modale logica is bloeiend, er zijn ook vele toepassingen

- Bv tijdlogica in redeneren in AI
- Kennislogica

Modale logica

- Strikte implicatie heeft een smaak van noodzakelijkheid
- Rare fonts in de reader: bv $\$$ moet zijn $\Box$ en U' moet zijn $\Diamond$
- Modale logica is bloeiend, er zijn ook vele toepassingen

- Bv tijdlogica in redeneren in AI
- Kennislogica
- Goede balans tussen expressiviteit en beslisbaarheid

Modale propositielogica

- De taal is prop logica met een $\Box$

Modale propositielogica

- De taal is prop logica met een $\Box$
- (we gebruiken $\Diamond$ als een afkorting)

Mogelijke werelden

- We hebben een nieuwe semantiek nodig

Mogelijke werelden

- We hebben een nieuwe semantiek nodig
- Noodzakelijkheid ruikt naar een kwantificatie over alle mogelijk werelden

Mogelijke werelden

- We hebben een nieuwe semantiek nodig
- Noodzakelijkheid ruikt naar een kwantificatie over alle mogelijk werelden
- Kripke Semantiek

Mogelijke werelden

- We hebben een nieuwe semantiek nodig
- Noodzakelijkheid ruikt naar een kwantificatie over alle mogelijk werelden
- Kripke Semantiek (Stig Kanger, Jaako Hintikka)

Mogelijke werelden

- We hebben een nieuwe semantiek nodig
- Noodzakelijkheid ruikt naar een kwantificatie over alle mogelijk werelden
- Kripke Semantiek (Stig Kanger, Jaako Hintikka)
- Wat bedoelen we met mogelijke werelden?

Mogelijke werelden

- Schaakvoorbeeld

Mogelijke werelden

- Schaakvoorbeeld
- p_1: tenminste 15 pionnen staan op hun oorspronkelijke plaats

Mogelijke werelden

- Schaakvoorbeeld
- p_1: tenminste 15 pionnen staan op hun oorspronkelijke plaats
- p_2: precies 15 pionnen staan op hun oorspronkelijke plaats

Mogelijke werelden

- Schaakvoorbeeld
- p_1: tenminste 15 pionnen staan op hun oorspronkelijke plaats
- p_2: precies 15 pionnen staan op hun oorspronkelijke plaats
- De waarheid van formules met p_i is afhankelijk van de situatie.

Mogelijke werelden

- Schaakvoorbeeld
- p_1: tenminste 15 pionnen staan op hun oorspronkelijke plaats
- p_2: precies 15 pionnen staan op hun oorspronkelijke plaats
- De waarheid van formules met p_i is afhankelijk van de situatie.
- ‘Mogelijke wereld’ is dus afhankelijk van de huidige wereld.

Mogelijke werelden

- Schaakvoorbeeld
- p_1: tenminste 15 pionnen staan op hun oorspronkelijke plaats
- p_2: precies 15 pionnen staan op hun oorspronkelijke plaats
- De waarheid van formules met p_i is afhankelijk van de situatie.
- ‘Mogelijke wereld’ is dus afhankelijk van de huidige wereld.
- Vandaar dat Kripke een toegankelijkheidsrelatie introduceerde

Modale semantiek

- Modelstructuur (ook wel *frame*)

Modale semantiek

- Modelstructuur (ook wel *frame*)
- Kripke model heeft een extra *interpretatiefunctie* I

Modale semantiek

- Modelstructuur (ook wel *frame*)
- Kripke model heeft een extra *interpretatiefunctie* I
- Een interpretatiefunctie determineert (legt vast) een waardering (ook wel *valuatie*)

Modale semantiek

- Modelstructuur (ook wel *frame*)
- Kripke model heeft een extra *interpretatiefunctie* I
- Een interpretatiefunctie determineert (legt vast) een waardering (ook wel *valuatie*)
- We kunnen mooi modelletjes tekenen

Modale semantiek

- Modelstructuur (ook wel *frame*)
- Kripke model heeft een extra *interpretatiefunctie* I
- Een interpretatiefunctie determineert (legt vast) een waardering (ook wel *valuatie*)
- We kunnen mooi modelletjes tekenen
- Geldigheid in een model: Γ/φ en $\varnothing/\varphi$

Modale semantiek

- Modelstructuur (ook wel *frame*)
- Kripke model heeft een extra *interpretatiefunctie* I
- Een interpretatiefunctie determineert (legt vast) een waardering (ook wel *valuatie*)
- We kunnen mooi modelletjes tekenen
- Geldigheid in een model: Γ/φ en $\varnothing/\varphi$
- Geldigheid in een modelstructuur S

Modale semantiek

- Modelstructuur (ook wel *frame*)
- Kripke model heeft een extra *interpretatiefunctie* I
- Een interpretatiefunctie determineert (legt vast) een waardering (ook wel *valuatie*)
- We kunnen mooi modelletjes tekenen
- Geldigheid in een model: Γ/φ en $\varnothing/\varphi$
- Geldigheid in een modelstructuur S
- Modaallogische geldigheid

Modale semantiek

- Modelstructuur (ook wel *frame*)
- Kripke model heeft een extra *interpretatiefunctie* I
- Een interpretatiefunctie determineert (legt vast) een waardering (ook wel *valuatie*)
- We kunnen mooi modelletjes tekenen
- Geldigheid in een model: Γ/φ en $\varnothing/\varphi$
- Geldigheid in een modelstructuur S
- Modaallogische geldigheid (Wederom rare fontjes ipv $\models$ en $\not\models$)

Modale semantiek

- Modelstructuur (ook wel *frame*)
- Kripke model heeft een extra *interpretatiefunctie* I
- Een interpretatiefunctie determineert (legt vast) een waardering (ook wel *valuatie*)
- We kunnen mooi modelletjes tekenen
- Geldigheid in een model: Γ/φ en $\varnothing/\varphi$
- Geldigheid in een modelstructuur S
- Modaallogische geldigheid (Wederom rare fontjes ipv $\models$ en $\not\models$)
- Hoe ziet de verzameling van modaallogische geldigheden er uit?