Voortgezette Logica, Week 2

Joost J. Joosten

Universiteit Utrecht

(sub)faculteit der Wijsbegeerte

Heidelberglaan 8

3584 CS Utrecht

Kamer 164, 030-2535575

jjoosten@phil.uu.nl

`www.phil.uu.nl/ jjoosten` (hier moet een tilde bij)

Vragen?

- Welke regels mogen?

Vragen?

- Welke regels mogen?
- Identiteit dus niet!!!

Vragen?

- Welke regels mogen?
- Identiteit dus niet!!!
- Existentiële kwantor eliminatie: uitroepteken achter het intrekken van de aanname

Vragen?

- Welke regels mogen?
- Identiteit dus niet!!!
- Existentiële kwantor eliminatie: uitroepteken achter het intrekken van de aanname
- Hoe moet van Dalen gelezen worden?

Vragen?

- Welke regels mogen?
- Identiteit dus niet!!!
- Existentiële kwantor eliminatie: uitroepteken achter het intrekken van de aanname
- Hoe moet van Dalen gelezen worden?
- Verdere vragen?

Propositielogica

- Bewijzen

Propositielogica

- Bewijzen
- Waarheid, i.e., semantiek

Propositielogica

- Bewijzen
- Waarheid, i.e., semantiek
- Vocabularium voor waarheidstafels: valuaties

Prop. Logica en valuaties

- We wijken hier iets af van van Dalen

Prop. Logica en valuaties

- We wijken hier iets af van van Dalen
- Definitie: een valuatie is een afbeelding van de propositievariabelen naar $\{0, 1\}$ (die zegt welke proposities het geval zijn)

Prop. Logica en valuaties

- We wijken hier iets af van van Dalen
- Definitie: een valuatie is een afbeelding van de propositievariabelen naar $\{0, 1\}$ (die zegt welke proposities het geval zijn)
- Inductief wordt gedefinieerd $v \models \varphi$ en we zeggen dat φ *is waar onder valuatie* v

Prop. Logica en valuaties

- We wijken hier iets af van van Dalen
- Definitie: een valuatie is een afbeelding van de propositievariabelen naar $\{0, 1\}$ (die zegt welke proposities het geval zijn)
- Inductief wordt gedefinieerd $v \models \varphi$ en we zeggen dat φ *is waar onder valuatie* v
- Stappen in de inductie:
  $v \models \phi \to \psi \quad \Leftrightarrow \quad [$If $v \models \phi$ then $v \models \psi]$

Prop. Logica en valuaties

- We wijken hier iets af van van Dalen
- Definitie: een valuatie is een afbeelding van de propositievariabelen naar $\{0, 1\}$ (die zegt welke proposities het geval zijn)
- Inductief wordt gedefinieerd $v \models \varphi$ en we zeggen dat φ *is waar onder valuatie* v
- Stappen in de inductie:
  $v \models \phi \rightarrow \psi \quad \Leftrightarrow \quad [\text{If } v \models \phi \text{ then } v \models \psi]$ (subtiel spel meta-taal versus object taal)
- ψ is per definitie een tautologie is –we schijven $\models \psi$– indien ψ waar is onder elke valuatie

Prop. Logica en valuaties

- We wijken hier iets af van van Dalen
- Definitie: een valuatie is een afbeelding van de propositievariabelen naar $\{0, 1\}$ (die zegt welke proposities het geval zijn)
- Inductief wordt gedefinieerd $v \models \varphi$ en we zeggen dat φ *is waar onder valuatie* v
- Stappen in de inductie:
  $v \models \phi \to \psi \quad \Leftrightarrow \quad$ [If $v \models \phi$ then $v \models \psi$] (subtiel spel meta-taal versus object taal)
- ψ is per definitie een tautologie is –we schijven $\models \psi$– indien ψ waar is onder elke valuatie
- Dit is bijna hetzelfde als waarheidstafels, maar iets anders

Propositielogica

- Ons bewijssysteem, ND, is correct

Propositielogica

- Ons bewijssysteem, ND, is correct
- Methode om niet-bewijsbaarheid aan te tonen!

Propositielogica

- Ons bewijssysteem, ND, is correct
- Methode om niet-bewijsbaarheid aan te tonen!
- Ons bewijssysteem, ND, is volledig

Propositielogica

- Ons bewijssysteem, ND, is correct
- Methode om niet-bewijsbaarheid aan te tonen!
- Ons bewijssysteem, ND, is volledig
- Bewijsbaar is existentieel, waarheid universeel, qua definitie

Predicatenlogica

- Predicaten en kwantoren

Predicatenlogica

- Predicaten en kwantoren
- Gegeven een vocabularium met ariteiten, definiëren wij de verzameling zinnen/formules.

Predicatenlogica

- Predicaten en kwantoren
- Gegeven een vocabularium met ariteiten, definiëren wij de verzameling zinnen/formules.
- Veel subtiliteiten: vrije variabelen, variabelen en meta-variabelen

Predicatenlogica

- Predicaten en kwantoren
- Gegeven een vocabularium met ariteiten, definiëren wij de verzameling zinnen/formules.
- Veel subtiliteiten: vrije variabelen, variabelen en meta-variabelen
- Regels ND

Predicatenlogica

- Predicaten en kwantoren
- Gegeven een vocabularium met ariteiten, definiëren wij de verzameling zinnen/formules.
- Veel subtiliteiten: vrije variabelen, variabelen en meta-variabelen
- Regels ND
- Semantiek predicatenlogica

Predicatenlogica

- Predicaten en kwantoren
- Gegeven een vocabularium met ariteiten, definiëren wij de verzameling zinnen/formules.
- Veel subtiliteiten: vrije variabelen, variabelen en meta-variabelen
- Regels ND
- Semantiek predicatenlogica
- Tarski's waarheidsconditie's

Predicatenlogica

- Predicaten en kwantoren
- Gegeven een vocabularium met ariteiten, definiëren wij de verzameling zinnen/formules.
- Veel subtiliteiten: vrije variabelen, variabelen en meta-variabelen
- Regels ND
- Semantiek predicatenlogica
- Tarski's waarheidsconditie's
- Predicatenlogica is correct en volledig! (Gödel)

Semantiek predicatenlogica

- Een model $\mathcal{M}$ voor een bepaald vocabularium bestaat uit een paar $\langle M, I \rangle$

Semantiek predicatenlogica

- Een model $\mathcal{M}$ voor een bepaald vocabularium bestaat uit een paar $\langle M, I \rangle$
- Hier is M het domein van $\mathcal{M}$, de objecten waar onze objectvariabelen naar verwijze.

Semantiek predicatenlogica

- Een model $\mathcal{M}$ voor een bepaald vocabularium bestaat uit een paar $\langle M, I\rangle$
- Hier is M het domein van $\mathcal{M}$, de objecten waar onze objectvariabelen naar verwijze. Bv, "iedereen", verwijst naar alle mensen.

Semantiek predicatenlogica

- Een model $\mathcal{M}$ voor een bepaald vocabularium bestaat uit een paar $\langle M, I \rangle$
- Hier is M het domein van $\mathcal{M}$, de objecten waar onze objectvariabelen naar verwijze. Bv, "iedereen", verwijst naar alle mensen.
- I is een interpretatie

Semantiek predicatenlogica

- Een model $\mathcal{M}$ voor een bepaald vocabularium bestaat uit een paar $\langle M, I \rangle$
- Hier is M het domein van $\mathcal{M}$, de objecten waar onze objectvariabelen naar verwijze. Bv, "iedereen", verwijst naar alle mensen.
- I is een interpretatie
- Als R bv een tweeplaatsig relatiesymbool is, dan is $I(R)$ een binaire relatie, dat is, $I(R) \subseteq M \times M$

Semantiek predicatenlogica

- Een model $\mathcal{M}$ voor een bepaald vocabularium bestaat uit een paar $\langle M, I \rangle$
- Hier is M het domein van $\mathcal{M}$, de objecten waar onze objectvariabelen naar verwijze. Bv, "iedereen", verwijst naar alle mensen.
- I is een interpretatie
- Als R bv een tweeplaatsig relatiesymbool is, dan is $I(R)$ een binaire relatie, dat is, $I(R) \subseteq M \times M$
- We laten het onderscheid tussen M en $\mathcal{M}$ vaak achterwege

Semantiek predicatenlogica

- Een model $\mathcal{M}$ voor een bepaald vocabularium bestaat uit een paar $\langle M, I \rangle$
- Hier is M het domein van $\mathcal{M}$, de objecten waar onze objectvariabelen naar verwijze. Bv, "iedereen", verwijst naar alle mensen.
- I is een interpretatie
- Als R bv een tweeplaatsig relatiesymbool is, dan is $I(R)$ een binaire relatie, dat is, $I(R) \subseteq M \times M$
- We laten het onderscheid tussen M en $\mathcal{M}$ vaak achterwege
- Let op: dit is een iets kortere (en (op deze slides) iets minder uitgewerkte) beschrijving dan van Dalen en zijn similarity types en structures daarvoor

Pred. Logica

- $M \models \psi(x)$ heeft zonder specificatie van x nog geen betekenis

Pred. Logica

- $M \models \psi(x)$ heeft zonder specificatie van x nog geen betekenis
- Wederom valuaties, maar dan nu voor pred. logica

Pred. Logica

- $M \models \psi(x)$ heeft zonder specificatie van x nog geen betekenis
- Wederom valuaties, maar dan nu voor pred. logica
- Van Dalen gebruikt dit niet

Pred. Logica

- $M \models \psi(x)$ heeft zonder specificatie van x nog geen betekenis
- Wederom valuaties, maar dan nu voor pred. logica
- Van Dalen gebruikt dit niet
- Voor *zinnen* is $M \models \psi$ wel betekenisvol

Pred. Logica

- $M \models \psi(x)$ heeft zonder specificatie van x nog geen betekenis
- Wederom valuaties, maar dan nu voor pred. logica
- Van Dalen gebruikt dit niet
- Voor *zinnen* is $M \models \psi$ wel betekenisvol
- De betekenis wordt gegeven door Tarski's waarheidsdefinitie

Pred. Logica

- $M \models \psi(x)$ heeft zonder specificatie van x nog geen betekenis
- Wederom valuaties, maar dan nu voor pred. logica
- Van Dalen gebruikt dit niet
- Voor *zinnen* is $M \models \psi$ wel betekenisvol
- De betekenis wordt gegeven door Tarski's waarheidsdefinitie
- Om deze te formuleren staan we (tijdelijk) alle objecten van M toe als constanten in onze taal

Pred. Logica

- $M \models \psi(x)$ heeft zonder specificatie van x nog geen betekenis
- Wederom valuaties, maar dan nu voor pred. logica
- Van Dalen gebruikt dit niet
- Voor *zinnen* is $M \models \psi$ wel betekenisvol
- De betekenis wordt gegeven door Tarski's waarheidsdefinitie
- Om deze te formuleren staan we (tijdelijk) alle objecten van M toe als constanten in onze taal
- Bv $M \models \forall x\ \varphi(x)$ iff. voor elke $a \in M$ geldt $M \models \varphi(x/a)$

Pred. Logica

- $M \models \psi(x)$ heeft zonder specificatie van x nog geen betekenis
- Wederom valuaties, maar dan nu voor pred. logica
- Van Dalen gebruikt dit niet
- Voor *zinnen* is $M \models \psi$ wel betekenisvol
- De betekenis wordt gegeven door Tarski's waarheidsdefinitie
- Om deze te formuleren staan we (tijdelijk) alle objecten van M toe als constanten in onze taal
- Bv $M \models \forall x\ \varphi(x)$ iff. voor elke $a \in M$ geldt $M \models \varphi(x/a)$ Iets andere substitutienotatie dan in vD.

Pred. Logica

- $M \models \psi(x)$ heeft zonder specificatie van x nog geen betekenis
- Wederom valuaties, maar dan nu voor pred. logica
- Van Dalen gebruikt dit niet
- Voor *zinnen* is $M \models \psi$ wel betekenisvol
- De betekenis wordt gegeven door Tarski's waarheidsdefinitie
- Om deze te formuleren staan we (tijdelijk) alle objecten van M toe als constanten in onze taal
- Bv $M \models \forall x\ \varphi(x)$ iff. voor elke $a \in M$ geldt $M \models \varphi(x/a)$ Iets andere substitutienotatie dan in vD.
- NB zeer subtiel spel tussen object-taal en meta-taal