Voortgezette Logica
2005-2006
Oefenopgaven
Week 8

Docent: Joost J. Joosten

June 12, 2006

Reader opgaven

In de reader staan op bladzijden 41 t/m 44 opgaven voor modale logica. Voor deze week zijn Opgaven 1 t/m 6 goed oefenmateriaal

Afleidingen, formeel en informeel

Geef van onderstaande formules zowel een formeel, formeel informeel (volgens de standaard van de reader), als ook een informeel bewijs. (In K)

1. $\neg\Diamond\neg A \leftrightarrow \Box A$
2. $\neg\Diamond\Diamond\neg A \leftrightarrow \Box\Box A$
3. $\Box A \wedge \Box B \rightarrow \Box(A \wedge B)$
4. $\Box p \wedge \Box(p \rightarrow q) \rightarrow \Box q$
5. $(\Box p \rightarrow \Box\Box p) \wedge \Box(\Box p \rightarrow \Box\Box p) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box\Box\Box p)$
6. $\Box(p \rightarrow q) \wedge \Diamond p \rightarrow \Diamond q$
7. $\Diamond p \rightarrow \Diamond(q \wedge \neg q)$
8. $\Box(p \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
9. $\Box(\Box\neg p \rightarrow \neg p) \wedge \Diamond p \rightarrow \Diamond\Diamond p$

Afleidingen en aannames

Bewijs de volgende uitspraken door concrete bewijzen te geven. Geef wederom een ND- en een informeel bewijs.

1. $\varphi \vdash \Box(((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi)$

Formele en informele afleidingen in extensies van K

Geef formele en informele afleidingen om de volgende uitspraken te bewijzen.

1. $\vdash_T \Box A \to \Diamond A$
2. $\vdash_{KD} \neg\Box\bot$
3. $\Diamond A \vdash_{S5} \Diamond\Box\Diamond A$

Systematische naamgevingen

Bewijs op syntactische wijze dat de volgende naamgevingen één en hetzelfde aanduiden.

1. $KT45$
2. $KT5$
3. $KT4B$
4. $KDB4$

Opgaven uit de reader

Maak de volgende opgaven:

1. Opgave 10
2. Opgave 11. Hierbij moet de j een φ zijn.
3. Opgave 13. Laat bovendien zien dat zowel semantisch als syntactisch deze conditie uit Euclidisch volgt. (Denk goed na wat de syntactische vraag hier betekent.)

Vreemd

Bewijs in $K4$ dat de volgende equivalentie geldt.

$$\Box\Diamond A \leftrightarrow \Box\Diamond\Box\Diamond A$$

$S5$

Laat σ een willekeurige niet lege string zijn van $\Box$ en $\Diamond$. Bewijs dat σp equivalent is aan $\Box p$ of aan $\Diamond p$.

Volledigheidsstellingen

Gebruik de volledigheidsstellingen bij de volgende opgaves.

1. $K \nvdash \Box A \to \Box\Box A$
2. $K \nvdash \Diamond A \to \Box\Diamond A$
3. $K4 \nvdash \Diamond A \to \Box\Diamond A$
4. $KD \nvdash \Box A \to A$
5. $K4 \nvdash \Box(\Box A \to A) \to \Box A$

Once more: the reader

Met de volledigheidsstellingen in achterhoofd, maak opgave 12.

Bewijsbaarheidslogica

1. Laat zien dat $K4$ met de regel $\Box A \to A/A$ bewijst $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$.
2. Zij L het axioma (schema):

$$\Box(\Box A \to A) \to \Box A$$

Laat zien dat[1]

$$KL \vdash \Box A \to \Box\Box A.$$

[1]Hint: pas L toe op $\Box A \wedge A$.