Voortgezette Logica
2005-2006
Oefenopgaven
Week 3

Docent: Joost J. Joosten

May 9, 2006

Natuurlijke deductie

Geef bewijzen in natuurlijke deductie van de volgende formules.

1. $(\exists x\ \varphi(x) \to \psi) \to \forall x\ (\varphi(x) \to \psi)$ where $x \notin \mathsf{FV}(\psi)$
2. $\forall x\ (\varphi(x) \to \psi) \to (\exists x\ \varphi(x) \to \psi)$ where $x \notin \mathsf{FV}(\psi)$
3. $\forall x\ (\varphi(x) \to \psi(x)) \wedge \neg\exists x\ \psi(x) \to \forall x \neg\varphi(x)$
4. $\forall x\ \varphi(x) \vee \neg\forall x\ \varphi(x)$
5. $\forall x\, \forall y\, \forall z\ (xRy \wedge yRz \to xRz) \wedge \forall x\, \forall y\ (xRy \to yRx) \wedge \forall x\, \exists y\, xRy \to \forall x\, xRx$

Volledigheidsstelling

Laat zien dat de volgende formules niet afleidbaar zijn. Maak gebruik van de volledigheidsstelling. Vertel ook welke richting van de volledigheidsstelling je gebruikt.

1. $\exists x\ (\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\forall x\ \varphi(x) \to \forall x \psi(x))$
2. $\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x) \to (\forall x \varphi(x) \vee \forall x \psi(x))$

Predicatenlogica

In deze opgaven vindt kwantificatie plaats over de verzameling van mensen. Op dit domein geldt dat iedereen ofwel een man, ofwel een vrouw is (maar niet allebei tegelijk: mooi voorbeeld van een exclusieve *of*). We gebruiken de volgende vertaalsleutel.

$M(x)$	x is een man
$H(x)$	x is hetero
$V(x,y)$	x is verliefd op y

A Vertaal de volgende zinnen

1. Er is een man verliefd op zichzelf.
2. Alle vrouwen zijn verliefd op een man. (Dus niet één man)
3. Iedereen is verliefd.
4. Alle heteromannen, zijn verliefd op een vrouw.
5. Er zijn niet heteromannen die verliefd zijn op een man.
6. Een heteroman, is nooit verliefd op een man.
7. Er is een man die zowel op een man als op een vrouw verliefd is.
8. Er is een vrouw waar alle mannen verliefd op zijn.

B Maak voor elke zin uit opdracht A een model waarin die zin waar is én een model waarin die zin onwaar is.

Modaliteiten

Wij hebben de $\Diamond$ operator gedefinieerd als $\neg\Box\neg$. Als we de $\Box$ lezen als *noodzakelijk* dan wordt de duale operator, i.e. de $\Diamond$ dus gelezen als *mogelijk*.

Hoe moeten we de $\Diamond$ lezen indien we de $\Box$ interpreteren als respectievelijk:

1. verplicht,
2. bekend,
3. bewijsbaar,
4. geloofd.

Modale valuaties

Bezie Figuur 9 op Bladzijde 9 van de reader. Bereken stap voor stap, net zoals dat in voorbeelden op Bladzijde 10 is gedaan, de waarden van

1. $V_M(\Box\Box\Box p, 2)$,
2. $V_M(\Diamond q, 3)$,
3. $V_M(\Box(p \to \Diamond p), 1)$,
4. $V_M(\Box(\neg p \to \neg q), 1)$.

Modale semantiek

Ga van elk van de volgende formules na of ze geldig zijn of niet. In geval van niet-geldigheid, geef een tegenmodel. In dit geval, bepaal of de negatie geldig is, en zo nee, geef ook daarvan een tegenmodel.

1. $\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q \vee p$
2. $\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box(q \vee p)$
3. $\Diamond p \wedge \Diamond q \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$
4. $\Box p \wedge \Box q \wedge \Diamond(\neg p \vee \neg q)$
5. $p \rightarrow \Box p$
6. $\Box p \rightarrow p$
7. $\Diamond(q \wedge \Diamond q) \wedge (\Diamond q \rightarrow \Diamond \neg q) \wedge \Box(\Diamond q \rightarrow \Diamond \neg q)$
8. $\Diamond(q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond q)) \wedge (\Diamond q \rightarrow \Diamond \neg q) \wedge \Box(\Diamond q \rightarrow \Diamond \neg q) \wedge \Box\Box(\Diamond q \rightarrow \Diamond \neg q)$