Voortgezette Logica
2005-2006
Oefenopgaven
Week 2

Docent: Joost J. Joosten

May 6, 2006

Natuurlijke deductie

1. Geef een bewijs met natuurlijke deductie van $\psi \to (\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\varphi \vee \psi)$.
2. Geef een bewijs met natuurlijke deductie van $(\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\varphi \vee \psi) \to \psi$.
3. Geef een bewijs met natuurlijke deductie van $(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi) \to \psi$.
4. Geef een bewijs met natuurlijke deductie van $\psi \to (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)$.
5. Geef een bewijs met natuurlijke deductie van
   $\exists x\ (\varphi(x) \to \psi) \to (\forall x\ \varphi(x) \to \psi)$
6. Geef een bewijs met natuurlijke deductie van
   $(\forall x\ \varphi(x) \to \psi) \to \exists x\ (\varphi(x) \to \psi)$

Semantiek en deductie

(A) Bepaal met behulp van waarheidstafels en/of valuaties van de volgende formules of het tautologiën zijn of niet.

   1. $p \to ((p \to \bot) \to \bot)$
   2. $p \to (\neg p \to q)$
   3. $p \vee \neg p$
   4. $\neg p \vee \neg\neg p$
   5. $p \vee q \to (p \to \neg q)$
   6. $p \vee q \to (\neg p \to q)$
   7. $(p \to (q \vee r)) \to (\neg q \to \neg p \vee r)$

8. $(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$
9. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
10. $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
11. $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
12. $(p_0 \wedge \neg p_0) \vee p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5 \vee p_6 \vee p_7 \vee p_8$

B Geef van elke tautologie uit onderdeel (A) van deze opgaven een bewijs (in natuurlijke deductie).

Valuaties en Vlauaties

We hebben in het college gezien hoe een valuatie de waarheidswaarde van de propositievariabelen vastlegt middels

$$v \models p \quad \Leftrightarrow \quad v(p) = 1.$$

Vervolgens hebben we gezegd wat $v \models \chi$ voor algemene χ betekent door te zeggen hoe $\models$ zich gedraagt ten opzichte van de connectieven. Bijvoorbeeld:

$$v \models \varphi \wedge \psi \quad \Leftrightarrow \quad v \models \varphi \text{ en } v \models \psi$$

Een andere manier om waarheid te defininiëren is door met een andere notie van valuaties te werken. Laten we deze voor het gemak even vlauaties noemen. Een vlauatie is dan een afbeelding l naar $\{0,1\}$ die gedefinieerd is voor *alle propositie formules*.

In het bijzonder definieert iedere vlauatie l een valuatie $l \restriction (\text{Prop})$ door gewoon het domein[1] van de afbeelding l te beperken tot alleen de propositie variabelen.

We willen nu dat vlauaties zodanige eigenschappen hebben dat ze zich op de volgende manier tot de door ons reeds gedefinieerde notie van waarheid verhouden.

$$l(\varphi) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad l \restriction (\text{Prop}) \models \varphi$$

Door deze eigenschap van vlauaties te eisen, ligt het gedrag van van vlauaties ten opzichte van de connectieven helemaal vast. Zo moeten we bijvoorbeeld eisen dat

$$l(\varphi \wedge \psi) = l(\varphi) \cdot l(\psi).$$

Een andere manier om hetzelfde te zeggen is

$$l(\varphi \wedge \psi) = \min\{l(\varphi), l(\psi)\}.$$

Hierbij is min de functie die het minimum van een aantal waarden geeft.

[1] Het domein van een afbeelding is de verzameling van waarden waarop de afbeelding is gedefinieerd.

A. Geef soortgelijke condities voor de andere connectieven. Merk op, je antwoorden moeten het formaat hebben van

$$l(\varphi \text{ connectief } \psi) = f(l(\varphi), l(\psi))$$

voor een zekere functie f.

We kunnen nu bij elke formule $\varphi(\vec{p})$ een functie $f(\vec{p})$ geven zo dat $l(\varphi(\vec{p})) = f(l(\vec{p}))$ voor[2] elke l.

B. Geef de corresponderende functies voor de volgende formules.

1. $p \wedge \neg q$
2. $(p \to q) \to (p \to \neg q)$
3. $p \wedge (q \to r)$
4. $\neg r \vee \neg p$
5. $p \wedge \neg p$
6. $p \vee \neg p$
7. $(\neg p \vee p) \to q$
8. $(p \to \neg q) \leftrightarrow (p \to q)$
9. $(p \wedge q \to r) \to (p \to r)$

Predicatenlogica

In deze opgaven vindt kwantificatie plaats over de verzameling van mensen. Op dit domein geldt dat iedereen ofwel een man, ofwel een vrouw is (maar niet allebei tegelijk: mooi voorbeeld van een exclusieve *of*). We gebruiken de volgende vertaalsleutel.

$M(x)$	x is een man
$H(x)$	x is hetero
$V(x, y)$	x is verliefd op y

A Vertaal de volgende zinnen

1. Er is een man verliefd op zichzelf.
2. Alle vrouwen zijn verliefd op een man. (Dus niet één man)
3. Iedereen is verliefd.
4. Alle heteromannen, zijn verliefd op een vrouw.
5. Er zijn niet heteromannen die verliefd zijn op een man.
6. Een heteroman, is nooit verliefd op een man.

[2]Met $f(l(\vec{p}))$ bedoelen we de uitdrukking $f(\vec{p})$ waarbij we voor iedere p_i de waarde $l(p_i)$ is gesubstitueerd.

7. Er is een man die zowel op een man als op een vrouw verliefd is.
8. Er is een vrouw waar alle mannen verliefd op zijn.

B Maak voor elke zin uit opdracht A een model waarin die zin waar is én een model waarin die zin onwaar is.