Voortgezette Logica
2005-2006
Oefenopgaven
Week 1

Docent: Joost J. Joosten

April 24, 2006

Natuurlijke deductie

Geef bewijzen met natuurlijke deductie van de volgende formules.

1. $(\varphi \wedge \psi \to \sigma) \to (\varphi \to (\psi \to \sigma))$
2. $(\varphi \wedge \psi \to \sigma) \to (\psi \to (\varphi \to \sigma))$
3. $(\varphi \to \psi) \to (\varphi \wedge \chi \to \psi)$
4. $\varphi \vee \psi \to \varphi \vee (\varphi \vee \psi)$
5. $\varphi \vee (\varphi \vee \psi) \to \varphi \vee \psi$
6. $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$
7. $\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$
8. $(\varphi \wedge \psi) \vee \varphi \to \varphi$
9. $\varphi \to (\varphi \wedge \psi) \vee \varphi$
10. $(\varphi \to (\psi \wedge \chi)) \to (\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi)$
11. $(\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi))$
12. $(\varphi \vee \psi \to \chi) \to ((\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi))$
13. $(\varphi \vee \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \to \varphi$
14. $(\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi)$

Constructies met bewijzen

Geef (informele) bewijzen voor de volgende uitspraken.

1. Als $\vdash \varphi \wedge \psi$, dan $\vdash \varphi$ en $\vdash \psi$.
2. Als $\vdash \varphi \vee \psi$ en $\vdash \neg\varphi$, dan $\vdash \psi$.
3. Als $\vdash \varphi$ en $\vdash \psi$, dan $\vdash \varphi \wedge \psi$.
4. Als $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ en $\vdash \neg\psi$, dan ook $\vdash \neg\varphi$.
5. Als $\vdash \varphi \rightarrow \neg\varphi$ en $\vdash \neg\varphi \rightarrow \varphi$ (dit was een mogelijke definitie van paradox), dan $\vdash \bot$.
6. Als $\vdash \varphi \rightarrow \neg\varphi$, dan $\vdash \neg\varphi$.

Valse honden en baasjes

In deze opgaven vindt kwantificatie plaats over de verzameling van honden en mensen. We gebruiken de volgende vertaalsleutel.

$H(x)$	x is een hond
$V(x)$	x is vals
$B(x,y)$	x is het baasje van y

Vertalingen

Vertaal de volgende zinnen naar predicaatlogische formules.

1. Iedere hond is vals
2. Geen hond is vals
3. Sommige honden zijn vals (er is een hond die vals is)
4. Sommige honden zijn vals en sommige honden zijn niet vals
5. Iedere hond heeft een baasje
6. Sommige honden hebben een baasje (Er zijn honden met een baasje)
7. Ieder is z'n eigen baas
8. Als een hond vals is, dan is z'n baas vals
9. Als een hond vals is, dan is z'n baas een hond
10. De baas van een hond is niet ook een hond
11. Soms is de hond de baas van het baasje

12. Als iemand een valse baas heeft, dan heeft 'ie een hond
13. Als iemand een valse baas heeft, dan heeft 'ie een valse hond
14. Een baasje is nooit een hond
15. Iedere baas is een hond

Predicaatlogica en natuurlijke deductie

Bewijs met behulp van natuurlijke deductie de volgende uitspraken.

1. $\vdash \forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\forall x\varphi(x) \to \forall x\psi(x))$
2. $\vdash \forall x\varphi(x) \to \neg\forall x\neg\varphi(x)$
3. $\vdash \exists x\ \varphi(x) \wedge \psi \to \exists x(\varphi(x) \wedge \psi) \quad x \notin \mathsf{FV}(\psi)$
4. $\vdash \exists xA(x) \vee \exists xB(x) \to \exists x(A(x) \vee B(x))$
5. $\vdash \forall x(\varphi(x) \vee \psi) \to \forall x\varphi(x) \vee \psi \quad x \notin \mathsf{FV}(\psi)$
6. $\vdash (\forall x\varphi(x) \vee \psi) \to \forall x(\varphi(x) \vee \psi) \quad x \notin \mathsf{FV}(\psi)$
7. $\vdash \forall x\varphi(x) \to \neg\exists x\neg\varphi(x)$
8. $\vdash \exists x\neg\varphi(x) \to \neg\forall x\varphi(x)$
9. $\vdash \neg\forall x\varphi(x) \to \exists x\neg\varphi(x)$

Constructieve bewijzen

Geef constructieve natuurlijke deductie bewijzen voor de volgende tautologieën.

1. $\neg\neg\neg\psi \to \neg\psi$
2. $\exists x\ (\phi(x) \vee \psi(x)) \to \exists x\ \phi(x) \vee \exists x\ \psi(x)$
3. $\exists x\ \phi(x) \vee \exists x\ \psi(x) \to \exists x\ (\phi(x) \vee \psi(x))$
4. $\forall x\ (\phi(x) \to \psi) \to (\exists x\ \phi(x) \to \psi)$
5. $(\exists x\ \phi(x) \to \psi) \to \forall x\ (\phi(x) \to \psi)$
6. $\forall x\ (\phi(x) \to \psi) \to \forall x\ (\phi(x) \to \psi)$