Voortgezette Logica
2005-2006
Oefententamen

Docent: Joost J. Joosten

June 19, 2006

Abstract

Schrijf je naam, collegekaartnummer en of je het vak op niveau 2 of 3 volgt op je antwoorden. Geef ook aan of je het vak in de voltijd of in de deeltijd volgt.

Frame correspondentie

Een frame (ook wel modelstructuur) heet *omhoog gefundeerd* als er geen oneindig rijtje $a_0, a_1, a_2, \ldots$ bestaat met

$$a_0 R a_1 R a_2 R \ldots$$

Bewijs dat een frame F Löb's axiomaschema $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$ waarmaakt dan en slechts dan als F zowel transitief als ook omhoog gefundeerd is.

Gödel's tweede onvolledigheidsstelling

In de redenering hieronder zit een fout. Beschrijf de fout[1] en bespreek of de redenering gerepareerd kan worden.

(*)
Zij T een RE theorie. Als T consistent is dan is $\mathsf{Con}(T)$ een onbeslisbare uitspraak. Dus, de theorie van T tezamen met een nieuw axioma $\mathsf{Con}(T)$ – we schijven $T + \mathsf{Con}(T)$– is dan ook consistent. Immers

$$T \vdash \neg\mathsf{Con}(T) \quad \Leftrightarrow \quad T + \mathsf{Con}(T) \vdash \bot.$$

En we weten nu juist dat $T \nvdash \neg\mathsf{Con}(T)$ vanwege de onafhankelijkheid van $\mathsf{Con}(T)$. We kunnen concluderen dat, als T consistent is, dan is $T + \mathsf{Con}(T)$

[1] De fout zit niet in de claim dat de redenering tussen (*) en (**) te formaliseren is binnen een theorie S.

ook consistent
(**)

De redenering tussen (*) en (**) valt te formaliseren binnen een theorie S. Als we nu $S = T + \mathsf{Con}(T)$ nemen, dan krijgen we dat

$$S \vdash \mathsf{Con}(T) \to \mathsf{Con}(T + \mathsf{Con}(T)),$$

en dus

$$S \vdash \mathsf{Con}(T + \mathsf{Con}(T)).$$

Maar dit is precies

$$S \vdash \mathsf{Con}(S).$$

Plantinga

Bewijs dat $\Diamond A \wedge \Box(A \to \Box A) \to A$ een tautologie is in $S5$. Relateer deze tautologie aan het ontologisch godsbewijs van Plantinga.

Natuurlijke deductie

Bewijs met natuurlijke deductie de volgende uitspraken.

1. $\varphi \vdash_{K4} \Box(((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi)$
2. $(\forall x\ A(x) \to B) \to \exists x\ (A(x) \to B) \quad (x \notin \mathsf{FV}(B))$
3. $(A \to C) \vee (\neg A \to C)$

Modellen

Laat van de volgende zin zien dat het geen tautologie is.

- $\exists x\ P(x) \wedge \exists x \forall y\ (P(y) \to R(x,y)) \to \exists x \exists y\ (P(x) \wedge P(y) \wedge R(x,y))$

  Beslis of

$$\exists x\ P(x) \wedge \exists x \forall y\ (P(y) \to R(x,y)) \to \exists x\ R(x,x)$$

een tautologie is of niet.