Voortgezette Logica
2005-2006
Oefenopgaven
Week 8

Harmen Ghijsen 0410179

June 22, 2006

S5

<u>TB.</u>
Laat σ een willekeurige niet lege string zijn van $\Box$ en $\Diamond$. Bewijs dat σp equivalent is aan $\Box p$ of aan $\Diamond p$.

<u>Bew.</u>
σ kan op 4 manieren eindigen: $\Box\Box$, $\Box\Diamond$, $\Diamond\Diamond$ of $\Diamond\Box$. Als het bewijsbaar is dat deze 4 combinaties voor p allemaal herleidbaar zijn tot $\Box p$ of $\Diamond p$, dan geldt dit voor alle willekeurige niet lege strings σ. De 4 mogelijke eindcombinaties kunnen dan namelijk worden vervangen door $\Box p$ of $\Diamond p$, waardoor er weer één van de vier mogelijke combinaties voor p staat, enz.
M.a.w. we moeten bewijzen dat $\Box\Box p$, $\Box\Diamond p$, $\Diamond\Diamond p$ en $\Diamond\Box p$ allemaal equivalent zijn aan $\Box p$ of $\Diamond p$.

Neem een model met $\langle W, R, I\rangle$ dat reflexief, transitief en symmetrisch is (S5). Vanwege deze drie eigenschappen geldt:
$x, y, z \in W \quad \forall x \forall y \forall z(xRx \wedge xRy \wedge xRz \wedge yRx \wedge yRz \wedge yRy \wedge zRx \wedge zRy \wedge zRz)$. (*)
Als $V_M(\Box\Box p, x) = 1$, dan geldt $\forall x \forall y \forall z(xRy \wedge yRz) \rightarrow V_M(p, y) = V_M(p, z) = 1$.
Vanwege (*) moet p dan gelden in alle werelden en dus $V_M(\Box p, x) = 1$.
Als $V_M(\Box p, x) = 1$, dan moet vanwege (*) p in alle werelden het geval zijn en dus $V_M(\Box\Box p, x) = 1$.
Dus $\Box\Box p \leftrightarrow \Box p$

Als $V_M(\Box\Diamond p, x) = 1$, dan geldt $\forall x \forall y \exists z(xRy \wedge yRz) \rightarrow V_M(p, z) = 1$. Aangezien alle werelden bereikbaar zijn vanuit alle werelden (*), geldt dat $V_M(\Diamond p, x) = 1$.

Als $V_M(\Diamond p, x) = 1$, dan is er een wereld waarin p het geval is. Vanwege (*) is deze wereld vanuit alle werelden bereikbaar en dus $V_M(\Box\Diamond p, x) = 1$.
Dus $\Box\Diamond p \leftrightarrow \Diamond p$

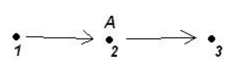
Als $V_M(\Diamond\Diamond p, x) = 1$, dan geldt $\forall x \exists y \exists z(xRy \wedge yRz) \rightarrow V_M(p, z) = 1$. Weer vanwege (*) geldt dat $V_M(\Diamond p, x) = 1$.
Als $V_M(\Diamond p, x) = 1$, dan is er een wereld waarin p het geval is. Vanwege (*) is deze wereld vanuit alle werelden bereikbaar en dus $V_M(\Diamond\Diamond p, x) = 1$.
Dus $\Diamond\Diamond p \leftrightarrow \Diamond p$

Als $V_M(\Diamond\Box p, x) = 1$, dan geldt $\forall x \exists y \forall z(xRy \wedge yRz) \rightarrow V_M(p, z) = 1$. Vanwege (*) betekent dit dat in alle werelden p geldt en dus $V_M(\Box p, x) = 1$.
Als $V_M(\Box p, x) = 1$, dan moet vanwege (*) p in alle werelden het geval zijn. Nogmaals vanwege (*) geldt $V_M(\Diamond\Box p, x) = 1$.
Dus $\Diamond\Box p \leftrightarrow \Box p$.

Q.E.D.

Volledigheidsstellingen

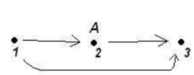
1. $K \nvdash \Box A \rightarrow \Box\Box A$
   Zie het volgende model:

   $\nvDash \Box A \rightarrow \Box\Box A$, immers $V_M(\Box A, 1) = 1$, maar $V_M(\Box\Box A, 1) = 0$, omdat $V_M(A, 3) = 0$. Volgens de volledigheidsstelling ($\Gamma \vdash \Delta \Leftrightarrow \Gamma \vDash \Delta$) geldt dus dat $K \nvdash \Box A \rightarrow \Box\Box A$.

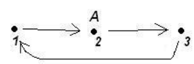
2. $K \nvdash \Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$
   (zie model van volledigheidsstellingen 1)
   $\nvDash \Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$, immers $V_M(\Diamond A, 1) = 1$, maar $V_M(\Box\Diamond A, 1) = 0$, omdat $V_M(A, 3) = 0$. Volgens de volledigheidsstelling geldt dus dat $K \nvdash \Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$.

3. $K4 \nvdash \Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$
   (zie het volgende transitieve (K4) model)

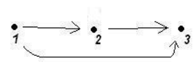
$\not\models \Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$, immers $V_M(\Diamond A, 1) = 1$, maar $V_M(\Box\Diamond A, 1) = 0$, omdat $V_M(A, 3) = 0$. Volgens de volledigheidsstelling geldt dus dat $K4 \nvdash \Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$.

4. $KD \nvdash \Box A \rightarrow A$
   (zie het volgende voortzettende (KD) model)

   $\not\models \Box A \rightarrow A$, immers $V_M(\Box A, 1) = 1$, maar $V_M(A, 1) = 0$. Volgens de volledigheidsstelling geldt dus dat $KD \nvdash \Box A \rightarrow A$.

5. $K4 \nvdash \Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$
   (zie het volgende transitieve (K4) model)

   $\not\models \Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$, immers het antecedent is waar, maar het consequent niet ($V_M(A, 1) = V_M(A, 2) = V_M(A, 3) = 0$). Volgens de volledigheidsstelling geldt dus dat $K4 \nvdash \Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$.

Once more: the reader

1. <u>TB.</u>
   Bewijs voor alle paren modale systemen S en S' $S' \vdash \varphi \rightarrow S \vdash \varphi$.

   <u>Bew.</u>
   Voor alle paren S en S' geldt dat
   1) ofwel $S' \in S$
   2) ofwel $D \in S' \wedge T \in S$

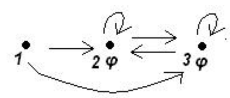
   In het eerste geval is het duidelijk dat alles wat in S' afleidbaar is, ook in S afleidbaar is. Immers, $\Delta \vdash \varphi \wedge \Delta \in \Gamma \rightarrow \Gamma \vdash \varphi$.

   In het tweede geval moeten we bewijzen dat D (voortzettendheid) afleidbaar is uit T (reflexiviteit). M.a.w. neem een M $\langle W, R, I \rangle$ reflexief, waarbij $\alpha \in W$
   We willen $V_M(\varphi \rightarrow \Diamond\varphi, \alpha) = 1$.
   Als $V_M(\varphi, \alpha) = 0$, dan geldt dat $V_M(\varphi \rightarrow \Diamond\varphi, \alpha) = 1$, immers, als het antecedent niet waar is, dan is de implicatie altijd waar. Als $V_M(\varphi, \alpha) = 1$, dan geldt vanwege reflexiviteit dat $V_M(\varphi \rightarrow \Diamond\varphi) = 1$; er is dan immers

altijd een mogelijke wereld waarin φ het geval is, namelijk α zelf.
Dus als een wereld reflexief is, dan geldt hierin altijd D,
m.a.w. $T \vdash D$.
In het tweede geval geldt dus ook $S' \vdash \varphi \rightarrow S \vdash \varphi$, immers:
$\Delta \vdash \varphi \wedge \Gamma \vdash \Delta \rightarrow \Gamma \vdash \varphi$.
Q.E.D.

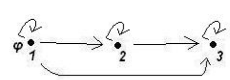
2. TB.
Voor alle paren modale systemen S en S' is er een formule afleidbaar in S, die niet afleidbaar is in S'.

Bew.
Een formule die afleidbaar is in KT45, KT4 en KT, maar niet in KD45, KD4 en KD is de formule die T zelf inhoudt:
$\Box\varphi \rightarrow \varphi$. Als deze formule niet afleidbaar is in KD45, is daarmee ook bewezen dat die niet afleidbaar is in KD4 of KD, omdat KD45 sterker is.
Zie het volgende model M dat voortzettend, transitief en euclidisch is (KD45):



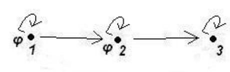
M $\nvDash \Box\varphi \rightarrow \varphi$, immers $V_M(\Box\varphi, 1) = 1$, maar $V_M(\varphi) = 0$.
M.b.v. de volledigheidsstelling geldt dus dat KD45 $\nvdash \Box\varphi \rightarrow \varphi$. Aangezien KD45 sterker is dan KD4 en KD, is deze formule ook hierin niet afleidbaar.

Een formule die afleidbaar is in KT45, KD45 en K45, maar niet in KT4, KD4 of K, is de formule die 5 zelf inhoudt, namelijk:
$\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$. Als deze formule niet afleidbaar is in KT4, dan is deze formule ook niet afleidbaar in KD4 of K, omdat KT4 sterker is.
Zie het volgende model dat reflexief en transitief is (KT4):



M $\nvDash \Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$, immers $V_M(\Diamond\varphi, 1) = 1$, maar $V_M(\Box\Diamond\varphi, 1) = 0$. (want $V_M(\Diamond\varphi, 2) = 0$)
M.b.v. de volledigheidsstelling geldt dus dat KT4 $\nvdash \Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$. Aangezien KT4 sterker is dan KD4 en K, is deze formule ook hierin niet afleidbaar.

Een formule die afleidbaar is in KT4 en KD4, maar niet in KT en KD is de formule die 4 zelf inhoudt, namelijk:
$\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$. Als deze formule niet afleidbaar is in KT, dan is deze formule ook niet afleidbaar in KD, omdat KT sterker is.
Zie het volgende reflexieve (KT) model:



M $\nvDash \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$, immers $V_M(\Box\varphi, 1) = 1$, maar $V_M(\Box\Box\varphi, 1) = 0$ (want $V_M(\Box\varphi, 2) = 0$)
M.b.v. de volledigheidsstelling geldt dus dat KT $\nvdash \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$. Aangezien KT sterker is dan KD, is deze formule ook hierin niet afleidbaar.

Een formule die afleidbaar is in KD, maar niet in K, is de formule die D zelf inhoudt:
$\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$.
Zie het volgende (K) model:

M $\nvDash \Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$, immers $V_M(\Box\varphi, 1) = 1$, maar $V_M(\Diamond\varphi) = 0$ (1 is een blinde wereld).
M.b.v. de volledigheidsstelling geldt dus dat K $\nvdash \Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$.

Ik heb nu voor alle paren S en S' laten zien dat er een formule is die afleidbaar is in S, maar niet in S'.
Q.E.D.