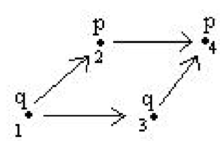
Voortgezette Logica
2005-2006
Oefenopgaven
Week 4

Harmen Ghijsen 0410179

May 23, 2006

Readeropgaven

2. a) Zie het volgende model M:



1. $V_M(\Diamond p \to \Diamond q, 1) = 1$,
   want $V_M(\Diamond p, 1) = V_M(\Diamond q, 1) = 1$,
   want

2. $V_M(\Diamond p \to \Diamond q, 2) = 0$,
   want $V_M(\Diamond p, 2) = 1$ en $V_M(\Diamond q, 2) = 0$.

3. $V_M(\Diamond p \wedge \Diamond q \to \Box(p \wedge q), 1) = 0$,
   want $V_M(\Diamond p, 1) = V_M(\Diamond q, 1) = 1$,
   maar $V_M(\Box(p \wedge q), 1) = 0$.

4. $V_M(\Diamond\Box(p \to \Box p), 3) = 1$,
   want $V_M(\Box p, 3) = V_M(\Box(p \to \Box p), 3) = V_M(\Diamond\Box(p \to \Box p), 3) = 1$.

5. $V_M(\Diamond p \to q, 4) = 1$,
   want $V_M(\Diamond p, 4) = V_M(q, 4) = 0$.

6. $V_M(\Diamond p \to q, 1) = 1$,
   want $V_M(\Diamond p, 1) = V_M(q, 1) = 1$.

7. $V_M(q \leftrightarrow (p \vee q), 1) = 1$,
   want $V_M(q, 1) = V_M(p \vee q, 1) = 1$.

8. $V_M(\Box p \leftrightarrow \Box(p \vee q), 1) = 0$,
   want $V_M(\Box p, 1) = 0$ en $V_M(\Box(p \vee q), 1) = 1$.

2. b) TB. $\nvDash \varphi \leftrightarrow \psi \vDash \sigma\,[p := \varphi] \leftrightarrow \sigma\,[p := \psi]$
<u>Bew.</u>
Maak gebruik van het model uit opgave 2a.
Vul voor $\sigma\,[p := \varphi]$ de formule uit 7 in: $q \leftrightarrow (\varphi \vee q)$.
Vul voor $\sigma\,[p := \psi]$ de formule uit 8 in: $\Box\psi \leftrightarrow \Box(\psi \vee q)$.
Nu staat er het volgende: $\varphi \leftrightarrow \psi \vDash (q \leftrightarrow (\varphi \vee q)) \leftrightarrow (\Box\psi \leftrightarrow \Box(\psi \vee q))$.
Hoewel φ in wereld 1 van het model van 2a dezelfde valuatie heeft als ψ (en er dus is voldaan aan het eerste gedeelte van de semantische gevolgrelatie), hebben de twee formules σ toch verschillende valuaties (en is er dus niet voldaan aan het tweede gedeelte van de semantische gevolgrelatie).
M.a.w. $\nvDash \varphi \leftrightarrow \psi \vDash \sigma\,[p := \varphi] \leftrightarrow \sigma\,[p := \psi]$
Q.E.D.

Consequentie relatie

1. <u>TB.</u> Als $\Gamma \vDash \varphi$ en $\Gamma \subseteq \Delta$, dan $\Delta \vDash \varphi$.
   <u>Bew.</u>
   Stel $\Gamma \vDash \varphi$ en $\Gamma \subseteq \Delta$.
   We willen $\Delta \vDash \varphi$.
   Aangezien $\Gamma \subseteq \Delta$, volgt dat $\Delta \vDash \Gamma$.
   Omdat verder geldt $\Gamma \vDash \varphi$, volgt samen met $\Delta \vDash \Gamma$ dat $\Delta \vDash \varphi$.
   Q.E.D.

2. Stel $Form \vDash \psi$, waarbij $Form$ de verzameling van alle modaallogische formules is.
   We kunnen m.b.v. de volledigheidsstelling ($\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash \varphi$) de volgende karakterisering van ψ geven: $Form \vdash \psi$.

Natuurlijke modale deductie

3. $\vdash \Box(p \to q) \land \Diamond p \to \Diamond q$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p \to q]^3 \qquad [p]^1}{\mathrm{q}}\;{\scriptstyle \to E} \qquad [\neg q]^2}{\bot}\;{\scriptstyle \to E}}{\neg p}\;{\scriptstyle \to I, 1}}{\neg q \to \neg p}\;{\scriptstyle \to I, 2}}{(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)}\;{\scriptstyle \to I, 3}}{\Box((p \to q) \to (\neg q \to \neg p))}\;{\scriptstyle \text{(Nec)!}} \qquad \dfrac{[\Box(p \to q) \land \Diamond p]^5}{\Box(p \to q)}\;{\scriptstyle \land E, l}}{\Box(\neg q \to \neg p)}\;{\scriptstyle \text{(Distr)}} \qquad [\Box\neg q]^4}{\Box\neg p}\;{\scriptstyle \text{(Distr)}} \qquad \dfrac{[\Box(p \to q) \land \Diamond p]^5}{\neg\Box\neg p}\;{\scriptstyle \land E, r}}{\bot}\;{\scriptstyle \to E}}{\neg\Box\neg q}\;{\scriptstyle \to I, 4}}{\Box(p \to q) \land \Diamond p \to \Diamond q}\;{\scriptstyle \to I, 5}
$$