Voortgezette Logica
2005-2006
Oefenopgaven
Week 3

Harmen Ghijsen 0410179

May 17, 2006

Natuurlijke deductie

3. $\vdash \forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \land \neg\exists x\ \psi(x) \to \forall x \neg\varphi(x)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \land \neg\exists x\ \psi(x)]^2}{\forall x(\varphi(x) \to \psi(x))}{\scriptstyle \land E, l}}{\varphi(x) \to \psi(x)}{\scriptstyle \forall E!} \qquad [\varphi(x)]^1}{\psi(x)}{\scriptstyle \to E}}{\exists x\ \psi(x)}{\scriptstyle \exists I!} \qquad \dfrac{[\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \land \neg\exists x\ \psi(x)]^2}{\neg\exists x\ \psi(x)}{\scriptstyle \land E, r}}{\bot}{\scriptstyle \to E}}{\neg\varphi(x)}{\scriptstyle \to I, 1}}{\forall x \neg\varphi(x)}{\scriptstyle \forall I!}}{\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \land \neg\exists x\ \psi(x) \to \forall x \neg\varphi(x)}{\scriptstyle \to I, 2}
$$

4. $\vdash \forall x \varphi(x) \lor \neg\forall x \varphi(x)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x \varphi(x)]^1}{\forall x \varphi(x) \lor \neg\forall x \varphi(x)}{\scriptstyle \lor I, l} \qquad [\neg(\forall x \varphi(x) \lor \neg\forall x \varphi(x))]^2}{\bot}{\scriptstyle \to E}}{\neg\forall x \varphi(x)}{\scriptstyle \to I, 1}}{\forall x \varphi(x) \lor \neg\forall x \varphi(x)}{\scriptstyle \lor I, r} \qquad [\neg(\forall x \varphi(x) \lor \neg\forall x \varphi(x))]^2}{\bot}{\scriptstyle \to E}}{\forall x \varphi(x) \lor \neg\forall x \varphi(x)}{\scriptstyle \text{RAA}, 2}
$$

5. $\vdash \forall x\forall y\forall z(xRy \wedge yRz \to xRz) \wedge \forall x\forall y(xRy \to yRx) \wedge \forall x\exists y\, xRy \to \forall xxRx$

$$\dfrac{[\forall x\forall y\forall z(xRy \wedge yRz \to xRz) \wedge \forall x\forall y(xRy \to yRx) \wedge \forall x\exists y\, xRy]^3}{\forall x\forall y(xRy \to yRx) \wedge \forall x\exists y\, xRy}\ \wedge E, r$$

$$\dfrac{\forall x\forall y(xRy \to yRx) \wedge \forall x\exists y\, xRy}{\forall x\forall y(xRy \to yRx)}\ \wedge E, r$$

$$\dfrac{\forall x\forall y(xRy \to yRx)}{\forall y(xRy \to yRx)}\ \forall E! \qquad \dfrac{\forall y(xRy \to yRx)}{\text{xRy} \to \text{yRx}}\ \forall E!$$

$$\dfrac{[xRy]^1 \quad \text{xRy} \to \text{yRx}}{\text{yRx}}\ \to E$$

$$\dfrac{[\forall x\forall y\forall z(xRy \wedge yRz \to xRz) \wedge \forall x\forall y(xRy \to yRx) \wedge \forall x\exists y\, xRy]^3}{\forall x\exists y\, xRy}\ \wedge E, r \qquad \dfrac{\forall x\exists y\, xRy}{\exists y\, xRy}\ \forall E!$$

$$\dfrac{\exists y\, xRy \quad \text{yRx}}{\text{yRx}}\ \exists E, 1!$$

$$\dfrac{\text{yRx} \quad [xRy]^2}{xRy \wedge yRx}\ \wedge I$$

$$\dfrac{[\forall x\forall y\forall z(xRy \wedge yRz \to xRz) \wedge \forall x\forall y(xRy \to yRx) \wedge \forall x\exists y\, xRy]^3}{\forall x\forall y\forall z(xRy \wedge yRz \to xRz)}\ \wedge E, l$$

$$\dfrac{\forall x\forall y\forall z(xRy \wedge yRz \to xRz)}{\forall y\forall z(xRy \wedge yRz \to xRz)}\ \forall E! \qquad \dfrac{\forall y\forall z(xRy \wedge yRz \to xRz)}{\forall z(xRy \wedge yRz \to xRz)}\ \forall E! \qquad \dfrac{\forall z(xRy \wedge yRz \to xRz)}{xRy \wedge yRx \to xRx}\ \forall E!$$

$$\dfrac{xRy \wedge yRx \quad xRy \wedge yRx \to xRx}{\text{xRx}}\ \to E$$

$$\dfrac{[\forall x\forall y\forall z(xRy \wedge yRz \to xRz) \wedge \forall x\forall y(xRy \to yRx) \wedge \forall x\exists y\, xRy]^3}{\forall x\exists y\, xRy}\ \wedge E, r \qquad \dfrac{\forall x\exists y\, xRy}{\exists y\, xRy}\ \forall E!$$

$$\dfrac{\exists y\, xRy \quad \text{xRx}}{\text{xRx}}\ \exists E, 2!$$

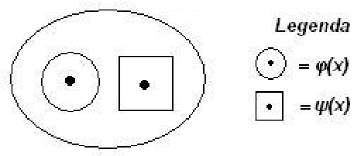
$$\dfrac{\text{xRx}}{\forall x\, xRx}\ \forall I!$$

$$\dfrac{\forall x\, xRx}{\forall x\forall y\forall z(xRy \wedge yRz \to xRz) \wedge \forall x\forall y(xRy \to yRx) \wedge \forall x\exists y\, xRy \to \forall x\, xRx}\ \to I, 3$$

Volledigheidsstelling

2. TB. $\nvdash \forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \to (\forall x\varphi(x) \vee \forall x\psi(x))$

Bew. Neem het volgende model M:



Uit het model volgt dat V($\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x))$)=1 en V($\forall x\varphi(x) \vee \forall x\psi(x)$)=0. Dus $\nvDash \forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \to (\forall x\varphi(x) \vee \forall x\psi(x))$. M.b.v. de volledigheidsstelling $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash \varphi$ (zoals die hier staat van links naar rechts gebruikt, oftewel de correctheidsstelling) geldt $\nvdash \forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \to (\forall x\varphi(x) \vee \forall x\psi(x))$.
Q.E.D.

Predicatenlogica

B5. $\neg\exists x\exists y(M(x) \wedge H(x) \wedge V(x,y) \wedge M(y))$

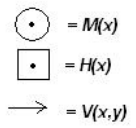


Figure 1: Legenda

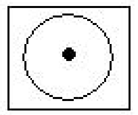


Figure 2: Model waarin de formule waar is

Immers, in M is geen x die zowel man als hetero is en ook verliefd is op een man.

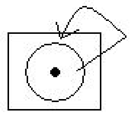


Figure 3: Model waarin de formule niet waar is

Immers, in M is er een x die zowel man als hetero is en ook verliefd is op een man, namelijk zichzelf.

B8. $\exists x \forall y(\neg M(x) \wedge (M(y) \rightarrow V(y,x)))$ (zie legenda uit B5)

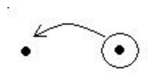


Figure 4: Model waarin de formule waar is

Immers, in dit model is er een object x dat geen man is en aangezien iedereen ofwel een man is, ofwel een vrouw, geldt dat dit object x een vrouw is. Verder is iedere man in het model verliefd op deze vrouw, dus in dit model is de formule waar.

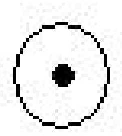


Figure 5: Model waarin de formule niet waar is

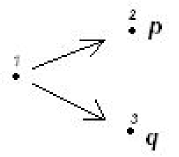
Immers, in dit model is er niet eens een vrouw (er is alleen een man) dus er is niet voldaan aan het eerste deel van de conjunctie.

Modale valuaties

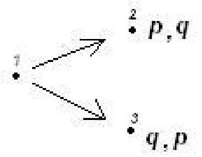
4. $V_m(\Box(\neg p \rightarrow \neg q), 1) = 0$, want
Met Sem $\neg$ volgt $V_m(\neg p, 3) = 1$ en $V_m(\neg q, 3) = 0$.
Verder volgt met Sem $\rightarrow$ dat $V_m(\neg p \rightarrow \neg q, 3) = 0$.
Tenslotte volgt met Sem $\Box$ dat $V_m(\Box(\neg p \rightarrow \neg q), 1) = 0$.

Modale Semantiek

3.$\not\models \Diamond p \wedge \Diamond q \to \Diamond(p \wedge q)$ (zie model):

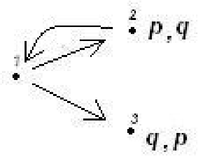


Immers, in wereld 1 geldt $\Diamond p \wedge \Diamond q$, maar niet $\Diamond(p \wedge q)$
$\not\models \neg(\Diamond p \wedge \Diamond q \to \Diamond(p \wedge q)$ (zie model):



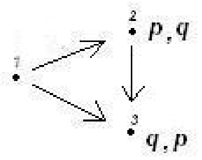
Immers, $\Diamond p \wedge \Diamond q \to \Diamond(p \wedge q)$ is nu wel geldig voor wereld 1.

5.$\not\models p \to \Box p$ (zie model):



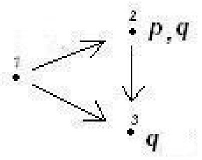
Immers, in wereld 2 geldt wel p, maar niet $\Box p$, omdat wereld 1 bereikbaar is uit wereld 2 en p daar niet het geval is.

$\nvdash \neg(p \to \Box p)$ (zie model):



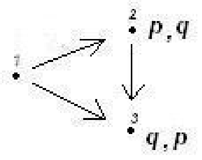
Immers, wereld 1 is niet langer bereikbaar, maar wereld 3 wel en hier is p het geval.

6. $\nvdash \Box p \to p$ (zie model):



Immers, 3 is een blinde wereld, dus geldt $\Box p$, terwijl p niet het geval is in 3.

$\nvdash \neg(\Box p \to p)$ (zie model):



Immers, in wereld 2 is p noodzakelijk en het geval.