Voortgezette Logica
2005-2006
Huiswerk opdrachten Week 2

Het LaTeX-meesterwerk van Lars Arthur Tump & Niels van Miltenburg

May 24, 2006

1 Natuurlijke deductie

- Opdracht 1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\psi]^1}{\varphi \vee \psi}\vee I, r \qquad \dfrac{[\psi]^1}{\neg\varphi \vee \psi}\vee I, r}{(\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\varphi \vee \psi)}\wedge I}{\psi \to (\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\varphi \vee \psi)}\to I, 1$$

- Opdracht 2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\varphi \vee \psi)]^1}{\varphi \vee \psi}\wedge E, l \qquad [\psi]^3 \qquad \dfrac{\dfrac{[(\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\varphi \vee \psi)]^1}{\neg\varphi \vee \psi}\wedge E, r \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^4 \qquad [\varphi]^2}{\bot}\to E}{\psi}\bot \qquad [\psi]^5}{\psi}\vee E, 4, 5}{\psi}\vee E, 2, 3}{(\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\varphi \vee \psi) \to \psi}\to I, 1$$

- Opdracht 3

$$\dfrac{\dfrac{[(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)]^1 \qquad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]^2}{\psi}\wedge E, r \qquad \dfrac{[\neg\varphi \wedge \psi]^3}{\psi}\wedge E, r}{\psi}\vee E, 2, 3}{(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi) \to \psi}\to I, 1$$

- Opdracht 4

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\varphi]^3$}
\AxiomC{$[\psi]^1$}
\RightLabel{$\wedge I$}
\BinaryInfC{$\varphi \wedge \psi$}
\RightLabel{$\vee I, l$}
\UnaryInfC{$(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)$}
\AxiomC{$[\neg((\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi))]^2$}
\RightLabel{$\rightarrow E$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\rightarrow I, 3$}
\UnaryInfC{$\neg\varphi$}
\AxiomC{$[\psi]^1$}
\RightLabel{$\wedge I$}
\BinaryInfC{$\neg\varphi \wedge \psi$}
\RightLabel{$\vee I, r$}
\UnaryInfC{$(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)$}
\AxiomC{$[\neg((\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi))]^2$}
\RightLabel{$\rightarrow E$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$RAA, 2$}
\UnaryInfC{$(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)$}
\RightLabel{$\rightarrow I, 1$}
\UnaryInfC{$\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)$}
\end{prooftree}
$$

- Opdracht 5

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\exists x(\varphi(x) \rightarrow \psi)]^1$}
\AxiomC{$[\varphi(x) \rightarrow \psi]^3$}
\AxiomC{$[\forall x\varphi(x)]^2$}
\RightLabel{$\forall E!$}
\UnaryInfC{$\varphi(x)$}
\RightLabel{$\rightarrow E$}
\BinaryInfC{ψ}
\RightLabel{$\exists E, 3!$}
\BinaryInfC{ψ}
\RightLabel{$\rightarrow I, 2$}
\UnaryInfC{$\forall x\varphi(x) \rightarrow \psi$}
\RightLabel{$\rightarrow I, 1$}
\UnaryInfC{$\exists x(\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi(x) \rightarrow \psi)$}
\end{prooftree}
$$

2 Semantiek en deductie (A)

- Opdracht 1
  $p \rightarrow ((p \rightarrow\bot) \rightarrow\bot)$

p	$\bot$	$p \rightarrow\bot$	$(p \rightarrow\bot) \rightarrow\bot$	$p \rightarrow ((p \rightarrow\bot) \rightarrow\bot)$
1	0	0	1	1
0	0	1	0	1

Het betreft hier een tautologie want $\forall v\ v(p \rightarrow ((p \rightarrow\bot) \rightarrow\bot)) = 1$

- Opdracht 2
  $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

p	q	$\neg p$	$\neg p \rightarrow q$	$p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$
1	1	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	0	1

Het betreft hier een tautologie want $\forall v\ v(p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)) = 1$

- Opdracht 3
  $p \lor \neg p$

p	$\neg p$	$p \lor \neg p$
1	0	1
0	1	1

  Het betreft hier een tautologie want $\forall v\ v(p \lor \neg p) = 1$

- Opdracht 4
  $\neg p \lor \neg\neg p$

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$\neg p \lor \neg\neg p$
1	0	1	1
0	1	0	1

  Het betreft hier een tautologie want $\forall v\ v(\neg p \lor \neg\neg p) = 1$

- Opdracht 5
  $p \lor q \to (p \to \neg q)$

p	q	$\neg q$	$p \lor q$	$p \to \neg q$	$p \lor q \to (p \to \neg q)$
1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1

  Het betreft hier geen tautologie want $\neg\forall v\ v(p \lor q \to (p \to \neg q)) = 1$
  $\exists v\ v(p = 1 \land q = 1) = 0$

- Opdracht 6
  $p \lor q \to (\neg p \to q)$

p	q	$\neg p$	$p \lor q$	$\neg p \to q$	$p \lor q \to (\neg p \to q)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1

  Het betreft hier een tautologie want $\forall v\ v(p \lor q \to (\neg p \to q)) = 1$

- Opdracht 7
  $(p \to (q \lor r)) \to (\neg q \to \neg p \lor r)$

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$q \vee r$	$\neg p \vee r$	$p \rightarrow (q \vee r)$	$\neg q \rightarrow \neg p \vee r$	$(p \rightarrow (q \vee r)) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p \vee r)$
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1

Het betreft hier een tautologie want
$\forall v\ v((p \rightarrow (q \vee r)) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p \vee r)) = 1$

- Opdracht 8

  $(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg p \to \neg q$	$(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1

  Het betreft hier geen tautologie want $\neg\forall v \ v((p \to q) \to (\neg p \to \neg q)) = 1$

  $\exists v \ v(p = 0 \wedge q = 1) = 0$

- Opdracht 9

  $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$	$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

  Het betreft hier een tautologie want $\forall v \ v((p \to q) \to (\neg q \to \neg p)) = 1$

- Opdracht 10

  $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ Zoals we zagen in opdracht 9 was $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ een tautologie. Nu bekijken we

  $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$	$(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

  Het betreft hier een ook tautologie want $\forall v \ v((\neg q \to \neg p) \to (p \to q)) = 1$

  Dus $\forall v v((p \to q) \to (\neg q \to \neg p)) = 1$

- Opdracht 11

  $(p \wedge (q \vee r)) \to ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$(p \wedge (q \vee r)) \to ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

$((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \rightarrow (p \wedge (q \vee r))$	$(p \wedge (q \vee r)) \rightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1

Het betreft hier een tautologie want
$\forall v \ v((p \wedge (q \vee r)) \rightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))) = 1$

- Opdracht 12
  $(p_0 \wedge \neg p_0) \vee p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5 \vee p_6 \vee p_7 \vee p_8$
  Geen tautologie $\exists v \ v(p_0 = 1) \ v(p_1 \ t/m \ p_8 = 0) = 0$

3 Semantiek en deductie (B)

- Opdracht 9

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p \rightarrow q]^1 \qquad [p]^3}{q} \rightarrow E \qquad [\neg q]^2}{\bot} \rightarrow E}{\neg p} \rightarrow I, 3}{\neg q \rightarrow \neg p} \rightarrow I, 2}{(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)} \rightarrow I, 1$$

- Opdracht 10

$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ (Voor $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ zie opdracht 9)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg q \rightarrow \neg p]^1 \qquad [\neg q]^3}{\neg p} \rightarrow E \qquad [p]^2}{\bot} \rightarrow E}{q} \ RAA, 3}{p \rightarrow q} \rightarrow I, 2}{(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)} \rightarrow I, 1$$

- Opdracht 11
  Voor het deductie bewijs van de dubbele pijl ($\leftrightarrow$) laten geven wij een afleiding van zowel linkerdeel $\rightarrow$ rechterdeel als van rechterdeel $\rightarrow$ linkerdeel

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{D}
\AxiomC{$[\neg((p \wedge q) \vee (p \wedge r))]^2$}
\RightLabel{$\rightarrow E$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$RAA, 2$}
\UnaryInfC{$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$}
\RightLabel{$\rightarrow I, 1$}
\UnaryInfC{$(p \wedge (q \vee r) \rightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$}
\end{prooftree}
$$

$D =$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[p \wedge (q \vee r]^1$}
\RightLabel{$\wedge E, l$}
\UnaryInfC{p}
\AxiomC{$[p \wedge (q \vee r]^1$}
\RightLabel{$\wedge E, r$}
\UnaryInfC{$q \vee r$}
\AxiomC{$[q]^3$}
\AxiomC{$[\neg((p \wedge q) \vee (p \wedge r))]^2$}
\AxiomC{$[p \wedge (q \vee r]^1$}
\RightLabel{$\wedge E, l$}
\UnaryInfC{p}
\AxiomC{$[r]^4$}
\RightLabel{$\wedge I$}
\BinaryInfC{$p \wedge r$}
\RightLabel{$\vee I, r$}
\UnaryInfC{$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$}
\RightLabel{$\rightarrow E$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\bot$}
\UnaryInfC{q}
\RightLabel{$\vee E, 3, 4$}
\TrinaryInfC{q}
\RightLabel{$\wedge I$}
\BinaryInfC{$p \wedge q$}
\RightLabel{$\vee I, l$}
\UnaryInfC{$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]^5$}
\AxiomC{$[p \wedge q]^3$}
\RightLabel{$\wedge E, l$}
\UnaryInfC{p}
\AxiomC{$[p \wedge r]^4$}
\RightLabel{$\wedge E, l$}
\UnaryInfC{p}
\RightLabel{$\vee E, 3, 4$}
\TrinaryInfC{p}
\AxiomC{D'}
\RightLabel{$\wedge I$}
\BinaryInfC{$p \wedge (q \vee r)$}
\RightLabel{$\rightarrow I, 5$}
\UnaryInfC{$((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \rightarrow (p \wedge (q \vee r))$}
\end{prooftree}
$$

$D' =$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]^5$}
\AxiomC{$[p \wedge q]^1$}
\RightLabel{$\wedge E, r$}
\UnaryInfC{q}
\RightLabel{$\vee I, l$}
\UnaryInfC{$q \vee r$}
\AxiomC{$[p \wedge r]^2$}
\RightLabel{$\wedge E, r$}
\UnaryInfC{r}
\RightLabel{$\vee I, r$}
\UnaryInfC{$q \vee r$}
\RightLabel{$\vee E, 1, 2$}
\TrinaryInfC{$q \vee r$}
\end{prooftree}
$$

4 Valuatie en Vlauatie

A

- $l(\varphi \wedge \psi) = min\{l(\varphi), l(\psi)\}$
- $l(\varphi \vee \psi) = max\{l(\varphi), l(\psi)\}$
- $l(\varphi \rightarrow \psi) = max\{l(1 - \varphi), l(\psi)\}$
- $l(\varphi \leftrightarrow \psi) = min\ max\ l(1 - \varphi), l(\psi)\ , max\ l(1 - \psi), l(\varphi)$
- $l(\neg\varphi) = l(1 - \varphi)$

B **5** $min\{l(p), l(1 - p)\}$

6 $max\{l(p), l(1 - p)\}$

7 $max\{l(1 - max\{l(1 - p), l(p)\}), l(q)\}$

8 $min\ max\ l(1 - max\ l(1 - p), l(1 - q)), l(max\ l(1 - p), l(q)\ )\ , max\ l(1 - max\ l(1 - p), l(q)\ ), l(max\ l(1 - p), l(1 - q)\ )$

9 $max\ l(1 - max\ l(1 - min\ l(p), l(q)\ ), l(r)\ ), l(max\ l(1 - p), l(r)\ )$

5 Predicatenlogica A

1. $\exists x[M(x) \wedge V(x,x)]$
2. $\forall x[\neg M(x) \wedge \exists y[M(y) \wedge V(x,y)]]$
3. $\forall x[\exists y[V(x,y)]]$
4. $\forall x[M(x) \wedge H(x) \wedge \exists y[\neg M(y) \wedge V(x,y)]]$
5. $\exists x[\exists y[M(x) \wedge \neg H(x) \wedge M(y) \wedge V(x,y)]]$
6. $\forall x[(M(x) \wedge H(x)) \rightarrow \neg\exists y[M(y) \wedge V(x,y)]]$
7. $\exists x[\exists y[\exists z[M(x) \wedge M(y) \wedge \neg M(z) \wedge V(x,y) \wedge V(x,z)]]]$
8. $\forall x[\exists y[\neg M(x) \wedge M(y) \wedge V(x,y)]]$