Voortgezette Logica
2005-2006
Tussentoets

Lars Arthur Tump (0453358)

June 23, 2006

1 Natuurlijke deductie

- Opdracht 1

$$
\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^2 \qquad \dfrac{[(\varphi \to \psi) \to \varphi]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^2 \qquad [\varphi]^3}{\bot}\to E}{\psi}\,\bot}{\varphi \to \psi}\to I, 3}{\varphi}\to E}{\dfrac{\bot}{\varphi}\,RAA, 2}\to E}{((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi}\to I, 1
$$

- Opdracht 2

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x(\psi \to \varphi(x))]^1}{\psi \to \varphi(x)}\,\forall E! \qquad [\psi]^2}{\varphi(x)}\to E}{\forall x\varphi(x)}\,\forall I!}{\psi \to \forall x\varphi(x)}\to I, 2}{\forall x(\psi \to \varphi(x)) \to (\psi \to \forall x\varphi(x))}\to I, 1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\psi \to \forall x\varphi(x)]^3 \qquad [\psi]^4}{\forall x\varphi(x)}\to E}{\varphi(x)}\,\forall E!}{\psi \to \varphi(x)}\to I, 4}{\forall x(\psi \to \varphi(x))}\,\forall I!}{(\psi \to \forall x\varphi(x)) \to \forall x(\psi \to \varphi(x))}\to I, 3}{(\forall x(\psi \to \varphi(x)) \to (\psi \to \forall x\varphi(x))) \wedge ((\psi \to \forall x\varphi(x)) \to \forall x(\psi \to \varphi(x)))}\,\wedge I
$$

- Opdracht 3

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\Box(A \wedge B)]^1$}
\AxiomC{$[A \wedge B]^2$}
\RightLabel{$\wedge E, l$}
\UnaryInfC{A}
\RightLabel{$\to I, 2$}
\UnaryInfC{$(A \wedge B) \to A$}
\RightLabel{$(Nec)!$}
\UnaryInfC{$\Box((A \wedge B) \to A)$}
\RightLabel{$(Distr)$}
\BinaryInfC{$\Box A$}
\AxiomC{$[\Box(A \wedge B)]^1$}
\AxiomC{$[A \wedge B]^3$}
\RightLabel{$\wedge E, r$}
\UnaryInfC{B}
\RightLabel{$\to I, 3$}
\UnaryInfC{$(A \wedge B) \to B$}
\RightLabel{$(Nec)!$}
\UnaryInfC{$\Box((A \wedge B) \to B)$}
\RightLabel{$(Distr)$}
\BinaryInfC{$\Box B$}
\RightLabel{$\wedge I$}
\BinaryInfC{$\Box B \wedge \Box A$}
\RightLabel{$\to I, 1$}
\UnaryInfC{$\Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\Box A \wedge \Box B]^1$}
\RightLabel{$\wedge E, r$}
\UnaryInfC{$\Box B$}
\AxiomC{$[\Box A \wedge \Box B]^1$}
\RightLabel{$\wedge E, l$}
\UnaryInfC{$\Box A$}
\AxiomC{$[A]^2$}
\AxiomC{$[B]^3$}
\RightLabel{$\wedge I$}
\BinaryInfC{$A \wedge B$}
\RightLabel{$\to I, 3$}
\UnaryInfC{$B \to (A \wedge B)$}
\RightLabel{$\to I, 2$}
\UnaryInfC{$A \to (B \to (A \wedge B))$}
\RightLabel{$(Nec)!$}
\UnaryInfC{$\Box(A \to (B \to (A \wedge B)))$}
\RightLabel{$(Distr)$}
\BinaryInfC{$\Box(B \to A \wedge B)$}
\RightLabel{$(Distr)$}
\BinaryInfC{$\Box(A \wedge B)$}
\RightLabel{$\to I, 1$}
\UnaryInfC{$(\Box A \wedge \Box B) \to \Box(A \wedge B)$}
\end{prooftree}
$$

- Opdracht 4

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg\Box\neg A \wedge \Box B]^1$}
\RightLabel{$\wedge E, l$}
\UnaryInfC{$\neg\Box\neg A$}
\AxiomC{$[\Box\neg(A \wedge B)]^2$}
\AxiomC{$[\neg\Box\neg A \wedge \Box B]^1$}
\RightLabel{$\wedge E, r$}
\UnaryInfC{$\Box B$}
\AxiomC{$[\neg(A \wedge B)]^4$}
\AxiomC{$[A]^5$}
\AxiomC{$[B]^3$}
\RightLabel{$\wedge I$}
\BinaryInfC{$A \wedge B$}
\RightLabel{$\to E$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\to I, 5$}
\UnaryInfC{$\neg A$}
\RightLabel{$\to I, 4$}
\UnaryInfC{$\neg(A \wedge B) \to \neg A$}
\RightLabel{$\to I, 3$}
\UnaryInfC{$B \to (\neg(A \wedge B) \to \neg A)$}
\RightLabel{$(Nec)!$}
\UnaryInfC{$\Box(B \to (\neg(A \wedge B) \to \neg A))$}
\RightLabel{$(Distr)$}
\BinaryInfC{$\Box(\neg(A \wedge B) \to \neg A)$}
\RightLabel{$(Distr)$}
\BinaryInfC{$\Box\neg A$}
\RightLabel{$\to E$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\to I, 2$}
\UnaryInfC{$\neg\Box\neg(A \wedge B)$}
\RightLabel{$\to I, 1$}
\UnaryInfC{$\neg\Box\neg A \wedge \Box B \to \neg\Box\neg(A \wedge B)$}
\end{prooftree}
$$

- Opdracht 5

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p]^1}{q \to p}\to I,3}{(p \to q) \vee (q \to p)}\vee I,r \qquad [\neg((p \to q) \vee (q \to p))]^1}{\bot}\to E}{q}\bot}{p \to q}\to I,2}{(p \to q) \vee (q \to p)}\vee I,l \qquad [\neg((p \to q) \vee (q \to p))]^1}{\dfrac{\bot}{(p \to q) \vee (q \to p)}RAA,1}\to E$$

- Opdracht 6

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \vee \varphi]^1 \qquad [\varphi]^2 \qquad [\varphi]^3}{\varphi}\vee E,2,3 \qquad \dfrac{[\varphi \vee \varphi]^1 \qquad [\varphi]^4 \qquad [\varphi]^5}{\varphi}\vee E,4,5}{\varphi \wedge \varphi}\wedge I}{\varphi \vee \varphi \to \varphi \wedge \varphi}\to I,1$$

- Opdracht 7

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists x\varphi(x) \vee \exists y\varphi(y)]^1 \qquad \dfrac{[\exists x\varphi(x)]^2 \qquad \dfrac{[\varphi(x)]^4}{\exists z\varphi(z)}\exists I!}{\exists z\varphi(z)}\exists E,4! \qquad \dfrac{[\exists y\varphi(y)]^3 \qquad \dfrac{[\varphi(y)]^5}{\exists z\varphi(z)}\exists I!}{\exists z\varphi(z)}\exists E,5!}{\exists z\varphi(z)}\vee E,2,3}{\exists x\varphi(x) \vee \exists y\varphi(y) \to \exists z\varphi(z)}\to I,1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists z\varphi(z)]^6 \qquad \dfrac{[\varphi(z)]^7}{\exists x\varphi(x)}\exists I!}{\exists x\varphi(x)}\exists E,7!}{\exists x\varphi(x) \vee \exists y\varphi(y)}\vee I,l}{\exists z\varphi(z) \to \exists x\varphi(x) \vee \exists y\varphi(y)}\to I,6}{(\exists x\varphi(x) \vee \exists y\varphi(y) \to \exists z\varphi(z)) \wedge (\exists z\varphi(z) \to \exists x\varphi(x) \vee \exists y\varphi(y))}\wedge I$$

2 Intuitionisme

Bezie $(p \to q) \vee (q \to p)$

Een intuitionist zal hier met name met betrekking tot de disjunctie bezwaar tegen aantekenen. Hij wil een bewijs van of $p \to q$ of $q \to p$ (of beiden), om aan te tonen of het hier om een ware uitspraak gaat. Stel er is hiervoor een bewijs en laten we het a noemen. Om de uitspraak waar te laten zijn heb je ten minste een bewijs nodig voor een deel van de disjunctie. We nemen $p \to q$. a is dus een constructie dat elk bewijs voor p omzet tot een bewijs voor q. Is dit niet het geval dan moet er (op dezelfde wijze) een bewijs b zijn voor het andere deel van de disjunctie om het geheel waar te laten zijn.
Het punt met deze uitspraak is dat, om hem een tautologie te laten zijn, men het principe van uitgesloten derde dient te gebruiken. Je wil de onmogelijkheid aantonen van het geval dat de uitspraak niet geldt. Dit is voor een intuitionist niet afdoende bewijs. 'Laat het bewijs maar zien voor een van beide delen' zal hij

zeggen. Een intuitionist zegt dus dat in ieder geval een deel (of beide delen) van de disjunctie bewezen moet kunnen worden, en dat dit bewijs daadwerkelijk aangetoond moet kunnen worden. Dit in tegenstelling tot een klassiek logicus die het afdoende vindt te zeggen dat de disjunctie waar is.(Dalen, Dirk van, *Logic and Structure*, Springer 2004 154-155).

Het bezwaar dat Lewis heeft tegen deze uitspraak heeft meer betrekking op de implicatie. De zogeheten materiele implicatie betreft dan wel een gevolgrelatie, maar een noodzakelijk verband tussen het antecedent en consequent hoeft niet het geval te zijn. ($(p \rightarrow q)$ kan herschreven worden als $\neg p \vee q$).Het bezwaar dat Lewis dan ook heeft is dat bij een uitspraak als $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ er altijd minstens een zin uit de ander volgt, ook dus als het noodzakelijk verband ertussen niet is. Lewis introduceert hiervoor de strikte implicatie. Met andere woorden; het een volgt noodzakelijk uit het ander. Er is dus (in de 'echte' wereld) een verband tussen de twee. Om met het voorbeeld uit de de reader te spreken moet, om bovenstaande uitspraak een tautologie te laten zijn volgens de materiele implicatie het volgende het geval zijn. Of uit dat de maan van kaas is volgt dat Jan Klaassen vrijgezel is, of dat als Jan Klaassen vrijgezel is volgt dat de maan van kaas is. Volgens Lewis is dit onzinnig, want de twee zinsdelen houden uberhaupt geen verband.(http://www-philosophy.ucdavis.edu/mattey/phi134/strict.htm).

3 Semantiek

- Opdracht 1
  $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

  Het betreft hier geen tautologie want $\neg\forall v\ ((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)) = 1$
  $\exists v\ v(p = 0 \wedge q = 1) = 0$

- Opdracht 2
  $(\forall x\ \varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow \forall x\ (\varphi(x) \rightarrow \psi) \quad x \notin FV(\psi)$

  Onderstaand model laat zien dat bovenstaande formule geen tautologie is:

  $\odot \quad \cdot$

  Legenda:
  O $= \varphi$
  $\cdot$ $=$ *object*

  ψ geldt dus niet in het gehele model.

- Opdracht 3
  $\exists x\ (\varphi(x) \to \psi) \to (\exists x\ \varphi(x) \to \psi) \quad x \notin FV(\psi)$

  Onderstaand model laat zien dat bovenstaande formule geen tautologie is:

  $\odot \quad \cdot$

  Legenda:
  O $=$ φ
  $\cdot$ $=$ *object*

  ψ geldt dus ook hier niet in het gehele model.

- Opdracht 4
  $\Box(p \to q) \vee \Box(q \to p)$

  De expressie $\Box(p \to q) \vee \Box(q \to p)$ is niet geldig. Een tegenmodel dat dit aantoont is:
  $M = \langle W, R, I \rangle$ waarbij $W = \{1, 2, 3\}$, $R = \{\langle 1, 2\rangle.\langle 1, 3\rangle\}$, $I(p, 2) = I(q, 3)$ en voor het overige $I = 0$.
  In dit model is zowel $\Box(p \to q)$ als $\Box(q \to p)$ ongeldig.

  $2, p \quad 3, q$
  $\uparrow \nearrow$
  1

- Opdracht 5
  $\Box p \to \Box\Box p$

  De expressie $\Box p \to \Box\Box p$ is niet geldig. Een tegenmodel dat dit aantoont is:
  $M = \langle W, R, I \rangle$ waarbij $W = \{1, 2, 3\}$, $R = \{\langle 1, 2\rangle.\langle 2, 3\rangle\}$, $I(p, 2)$ en voor het overige $I = 0$.
  In dit model is $\Box p$ geldig en $\Box\Box p$ ongeldig. We kunnen dus stellen dat de implicatie niet geldig is.

  $1 \longrightarrow 2, p \longrightarrow 3$

- Opdracht 6
  $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$

  De expressie $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ is niet geldig. Een tegenmodel dat dit aantoont is:
  $M = \langle W, R, I \rangle$ waarbij $W = \{1, 2\}$, $R = \{\langle 1, 2\rangle.\langle 2, 1\rangle\}$ en voor het overige $I = 0$.
  In dit model is $\Box(\Box p \to p)$ geldig en $\Box p$ ongeldig. We kunnen dus stellen dat de implicatie niet geldig is.

  1
  $\uparrow\downarrow$
  2

- Opdracht 7
  $\Box(p \wedge \Box p \rightarrow q) \vee \Box(\Box q \rightarrow p)$

  De expressie $\Box(p \wedge \Box p \rightarrow q) \vee \Box(\Box q \rightarrow p)$ is niet geldig. Een tegenmodel dat dit aantoont is:
  $M = \langle W, R, I\rangle$ waarbij $W = \{1, 2, 3\}$, $R = \{\langle 1, 2\rangle.\langle 1, 3\rangle.\langle 2, 2\rangle\}$, $I(p, 2)$ en voor het overige $I = 0$.
  In dit model is zowel $\Box(p \wedge \Box p \rightarrow q)$ als $\Box(\Box q \rightarrow p)$ ongeldig.

  $\cap$
  $2, p \quad 3$
  $\uparrow \nearrow$
  1

4 Semantiek Vergelijken

Bewijs: Als $\not\models \varphi$ dan ook $\not\models \Box\varphi$.

Als φ geen tautologie is, dan wil dat zeggen dat er een valuatie is waarvoor geldt $\varphi = 0$. Met andere woorden: $\exists v\ v(\varphi) = 0$. Nu willen we laten zien dat $\Box\varphi$ dan ook geen tautologie is. Met de necesitatieregel komen we van φ tot $\Box\varphi$. Aangezien er een valuatie was voor $v(\varphi) = 0$, betekent dat dat er na de necesitatieregel geldt: $\exists v\ v(\Box\varphi) = 0$.
Dus: Als $\not\models \varphi$ dan ook $\not\models \Box\varphi$.

5 Uitroeptekens

- Opdracht 1

  $$\dfrac{\begin{array}{c} D \\ \forall x \varphi(x) \end{array}}{\varphi(t)}\ \forall E!$$

  De voorwaarde voor de universele eliminatie die wordt uitgedrukt door het uitroepteken is: t is vrij voor x in φ.

  $$\dfrac{\begin{array}{c} D \\ \varphi(x) \end{array}}{\forall x \varphi(x)}\ \forall I!$$

  De voorwaarde voor de universele introductie die wordt uitgedrukt door het uitroepteken is: x is niet element van de vrije variabelen in de aannames van D.

  $$\dfrac{\begin{array}{c} D \\ \exists x \varphi(x) \end{array} \qquad \begin{array}{c} [\varphi(x)]^1 \\ D' \\ \psi \end{array}}{\psi}\ \exists E, 1!$$

De voorwaarde voor de extistentiele eliminatie die wordt uitgedrukt door het uitroepteken is: x komt niet vrij voor in ψ en niet in de open aannamen in D'.

$$\dfrac{\begin{array}{c} D \\ \varphi(t) \end{array}}{\exists x \varphi(x)} \exists I!$$

De voorwaarde voor de existentiele introductie die wordt uitgedrukt door het uitroepteken is: t is vrij voor x in φ

$$\dfrac{\begin{array}{c} D \\ \varphi \end{array}}{\Box \varphi} (Nec)!$$

De voorwaarde voor de necessitatie die wordt uitgedrukt door het uitroepteken is: Er zijn geen open aannames meer in D.

- Opdracht 2

Voorbeelden van foute toepassingen van bovengenoemde regels (het uitroepteken wordt dus weggelaten).

Universele Eliminatie ($\forall E$)

$$\dfrac{\dfrac{[\forall x \forall y(x,y)]^1}{\forall y(y,y)} \forall E}{\forall x \forall y(x,y) \rightarrow \forall y(y,y)} \rightarrow I, 1$$

Universele introductie ($\forall I$)

$$\dfrac{\dfrac{[\varphi(x)]^1}{\forall x \varphi(x)} \forall I}{\varphi(x) \rightarrow \forall x \varphi(x)} \rightarrow I, 1$$

Existentiele eliminatie ($\exists E$)

$$\dfrac{\exists x \varphi(x) \qquad [\varphi(x)]^1}{\varphi(x)} \exists E, 1$$

Existentiele introductie ($\exists I$)

$$\frac{\varphi(x,y)}{\exists x\varphi(x,x)}\,\exists I$$

Necessitatie (Nec)

$$\frac{\dfrac{[p]^1}{\Box p}\,Nec}{p \to \Box p} \to I, 1$$