Voortgezette Logica
2005-2006
Eindtentamen

Docent: Joost J. Joosten

June 27, 2006

Abstract

Schrijf je naam, collegekaartnummer en of je het vak op niveau 2 of 3 volgt op je antwoorden. Geef ook aan of je het vak in de voltijd of in de deeltijd volgt.

1 Modale logica en $S5$ (40 punten)

1. Bewijs dat
$$(\Box A \to A) \to (A \to \Diamond A)$$
geen tautologie is in K.

2. We definiëren het schema T' als volgt:
$$T' \ := \ A \to \Diamond A$$
Bewijs dat KT in extensie dezelfde logica is (i.e., dezelfde stellingen bewijst) als KT'.

3. We definiëren het schema $4'$ als volgt:
$$4' \ := \ \Diamond\Diamond A \to \Diamond A$$
Bewijs dat $K4$ in extensie dezelfde logica is (i.e., dezelfde stellingen bewijst) als $K4'$.

4. Bewijs dat een frame (modelstructuur) F het schema T' waar maakt dan en slechts dan als F reflexief is.

5. Geef een (informeel informeel) bewijs in $KT5$ van B. Ter herinnering, het schema B is:
$$A \to \Box\Diamond A.$$

6. Bewijs de volgende stelling.

   Stelling Indien een frame Euclidisch en reflexief is, dan is het ook transitief.

7. **Deze opgave hoeft NIET gemaakt te worden door studenten die dit vak op Niveau 2 doen. Voor Niveau 3 is de opgave wel verplicht.**

   Geef in $KT5$ een (informeel informeel) bewijs van 4 of $4'$ (kies één van beide). Hint: het syntactisch bewijs volgt het semantisch bewijs uit de vorige opgave.

8. Bewijs dat $\Diamond A \wedge \Box(A \to \Box A) \to A$ een tautologie is in $S5$. Relateer deze tautologie aan het ontologisch godsbewijs van Plantinga.

2 Natuurlijke deductie (15 punten)

Geef een bewijs in natuurlijke deductie van de volgende twee formules

$$\neg\neg A \to A \tag{1}$$

$$\neg\neg\neg A \to \neg A \tag{2}$$

Geef een constructief bewijs voor

$$\neg\neg\neg A \to \neg A \tag{3}$$

en benadruk wat het bewijs constructief maakt.

3 Gödels onvolledigheidsstellingen (25 punten)

1. Formuleer de tweede onvolledigheidsstelling van Gödel.

2. De regel van Löb toegepast op Peano Rekenkunde (je weet wel, die theorie over getallen die we nooit hebben gezien, maar waar we zo veel over hebben gesproken) is de volgende:

   Als $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Bew}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner A \urcorner) \to A$, dan $\mathsf{PA} \vdash A$.

   Sommige mensen interpreteren dit als

   Peano Rekenkunde is zo bescheiden over zijn eigen correctheid als zij mogelijkerwijs zou kunnen zijn.

   Leg uit hoe je de regel van Löb inderdaad zo zou kunnen interpreteren.

3. Laat zien hoe Gödels tweede onvolledigheidsstelling volgt uit de regel van Löb.

4. Formuleer de zogeheten disjunctieve stelling van Gödel over mensen, machines en onbeslisbaarheid. Geef een hele korte toelichting/uitleg van de begrippen die in deze stelling voorkomen.

4 Predicaten logica (20 punten)

In deze hele opgave geldt: $x \notin FV(B)$

1. Geef een bewijs in ND van de volgende tautologie.

$$\forall x\ (A(x) \to B) \to (\forall x\ A(x) \to B)$$

2. Geef een bewijs in ND van de volgende tautologie.

$$(\forall x\ A(x) \to B) \to \exists x\ (A(x) \to B)$$

3. Laat zien dat

$$(\forall x\ A(x) \to B) \to \forall x\ (A(x) \to B)$$

geen predicaatlogische tautologie is.