Parvulae Logicales VI Modale Logica

Inhoud

December 1989

Modale logica

1. Inleiding

Modale logica is van oudsher de tak van logica die zich bezighoudt met de logische analyse van uitspraken en redeneringen waarin modaliteiten als 'het is noodzakelijk dat', 'het is (on)mogelijk dat' en 'het is contingent dat' voorkomen. Reeds Aristoteles besteedde ruime aandacht aan modale logica. Hij beargumenteerde bijvoorbeeld dat 'het is niet mogelijk dat A' (en niet 'het is mogelijk dat niet A') de tegengestelde uitspraak van 'het is mogelijk dat A' is en hij bestudeerde syllogismen waarin modale uitspraken voorkomen.

Aanleiding voor de moderne modale logica vormde de in het invloedrijke artikel LEWIS 1912 verwoorde opvatting dat de klassieke logica, zoals bijv. neergelegd in WHITEHEAD & RUSSELL 1910-13, niet voorzag in een adekwate analyse van de gevolgrelatie. De zogenaamde 'materiële implicatie' $\rightarrow$ van Whitehead en Russell is tot op zekere hoogte inderdaad als een implicatie of gevolgrelatie te beschouwen (immers A, A $\rightarrow$ B / B is geldig). Echter, als men "in het dagelijks leven" zegt dat B uit A volgt (of dat A impliceert dat B), dan veronderstelt men gewoonlijk een bepaald verband tussen de betekenissen van A en B. Omdat de $\rightarrow$ niet als een dergelijke strengere vorm van implicatie kan worden gelezen, introduceerde Lewis hiervoor de *strikte implicatie*, met de "vishaak"-notatie $-\!\!3$.

VOORBEELD 1.1
In de propositielogica zijn (1) A $\rightarrow$ (B $\rightarrow$ A) en (2) $\neg$A $\rightarrow$ (A $\rightarrow$ B) geldige zinnen. Als men 'A $\rightarrow$ B' leest als 'B volgt uit A', dan betekenen (1) en (2) zoiets als dat een ware zin uit alles volgt en dat alles uit een onware zin volgt. Omdat (1) en (2) bij bovenstaande interpretatie van $\rightarrow$ de genoemde paradoxale resultaten opleveren staan ze bekend als 'de paradoxen van de materiële implicatie'. Een ander tegenintuïtief resultaat van bovenstaande lezing van $\rightarrow$ is dat van twee zinnen altijd minstens één uit de ander volgt. ((A $\rightarrow$ B) $\vee$ (B $\rightarrow$ A) is geldig.)

VOORBEELD 1.2 Beschouw de volgende zinnen:

(1) Als de maan van groene kaas is gemaakt (A), dan is Jan Klaassen geen vrijgezel (B).

(2) Als Katrijn de vrouw van Jan Klaassen is (C), dan is Jan Klaassen geen vrijgezel (B).

Er geldt: $A \rightarrow B$ en $C \rightarrow B$. Er geldt ook $C \mathrel{—\!3} B$, maar *niet* $A \mathrel{—\!3} B$. Er bestaat immers geen dwingend of noodzakelijk verband tussen A en B. (B 'volgt' niet uit A.) Niettemin geldt $A \rightarrow B$ omdat A niet waar is.

$A \rightarrow B$ betekent dat het niet zo is dat B onwaar is terwijl A waar is. $A \mathrel{—\!3} B$ betekent dat het niet zo *kan* zijn (dat het *onmogelijk* is) dat B onwaar is terwijl A waar is, met andere woorden, dat het *noodzakelijk* is dat B waar of A onwaar is. $A \mathrel{—\!3} B$ heeft dus de betekenis 'het is noodzakelijk dat $(A \rightarrow B)$'.

In LEWIS 1918 werd een (later als 'het Survey systeem' bekend geworden) axiomasysteem voor de met de strikte implicatie uitgebreide propositielogica gegeven. De betekenis van $\mathrel{—\!3}$ was echter slechts met behulp van vage intuïties omlijnd, zodat al gauw andere systemen werden voorgesteld als <u>het</u> systeem voor strikte implikatie. Er onstond zelfs een hele serie van zogenaamde Lewis-systemen **S1**, **S2**, **S3**,.. (**S1** t/m **S5** zijn van Lewis zelf afkomstig, waarbij **S3** overeen komt met het oorspronkelijke Survey systeem. Anderen hebben de serie later nog aanzienlijk uitgebreid.)

Als men de notatie '$\$\varphi$' gebruikt voor 'het is noodzakelijk dat φ', dan kan men $\varphi \mathrel{—\!3} \psi$ beschouwen als een afkorting voor $\$(\varphi \rightarrow \psi)$. Men kan dus de systemen voor de strikte implicatie ook formuleren in de taal van de propositielogica uitgebreid met een noodzakelijkheidsoperator $\$$. Dit leverde een meer inzichtelijke formulering van de verschillende systemen op en bovendien ging men Lewis-achtige systemen steeds meer gebruiken voor de logische analyse van het begrip 'noodzakelijk' in plaats van die van de gevolgrelatie. (De interesse in de analyse van de gevolgrelatie is nooit geheel verdwenen. De belangrijkste huidige vertegenwoordigers van deze traditie zijn de zogenaamde 'relevantie-logici'. Zie ANDERSON & BELNAP 1975.)

Aristoteles leert ons dat 'het is mogelijk dat φ' hetzelfde betekent als 'het is niet noodzakelijk dat niet φ' (symbolisch: $\neg\$\neg\varphi$). We zullen soms '$\text{Ú}\varphi$' gebruiken als afkorting voor '$\neg\$\neg\varphi$'. In de gebruikelijk modale systemen (en zeker in alle systemen die wij zullen beschouwen) gelden alle wetten van de propositielogica en ook de substitutieregel en de regel van de vervanging van equivalenten (zie Parvulae Logicales II 2.1.4.6(iii)), zodat: $\text{Ú}\varphi \text{ eq } \neg\$\neg\varphi$ (per definitie)

$\Rightarrow \quad \neg\text{Ú}\varphi \text{ eq } \$\neg\varphi$ (propositielogica)

$\Rightarrow \quad \neg\text{Ú}\neg\psi \text{ eq } \$\neg\neg\psi$ (substitueer $\neg\psi$ voor φ)

$\Rightarrow \quad \neg\text{Ú}\neg\psi \text{ eq } \$\,\psi$ (vervang $\neg\neg\psi$ door de equivalente ψ)

Uit het bovenstaande volgt dat we ook Ú als primitief symbool hadden kunnen kiezen en $\$$ via een definitie hadden kunnen invoeren. De symbolische weergave van de belangrijkste modaliteiten wordt :

het is noodzakelijk dat φ	$\$\varphi$ of $\neg\text{Ú}\neg\varphi$
het is mogelijk dat φ	$\text{Ú}\varphi$ of $\neg\$\neg\varphi$
het is niet mogelijk dat φ	$\neg\text{Ú}\varphi$ of $\$\neg\varphi$
φ is contingent	$\neg\$\varphi \wedge \neg\$\neg\varphi$ of $\text{Ú}\neg\varphi \wedge \text{Ú}\varphi$

Opmerking: Sommigen gebruiken de zinsnede 'het is mogelijk dat φ' met de betekenis van wat hierboven met 'φ is contingent' is aangeduid. Wij (en vele filosofen en alle modale logici met ons) prefereren echter de opvatting van Aristoteles.

We geven nu een formele beschrijving van de taal L_M voor de modale propostielogica.

DEFINITIE 1.3 Het *alfabet* van L_M bestaat uit:
- propositieletters $p_1, p_2, p_3, \ldots$ (informeel $p, q, r, \ldots$)
- logische constanten: $\bot, \wedge, \vee, \rightarrow, \$$
- hulpsymbolen: (,)

De connectieven $\wedge$, $\vee$ en $\rightarrow$ zijn tweeplaatsig, de noodzakelijkheidsoperator \$ is éénplaatsig, terwijl $\bot$ nulplaatsig is. Voor de klasse van propositieletters gebruiken we de afkorting PL. Om over willekeurige propositieletters te kunnen spreken gebruiken we de aanduidingen $p_i, p_j, ..$

DEFINITIE 1.4 De klasse FORM van formules van L_M wordt bepaald door de volgende regels:
- (i) $PL \subseteq FORM$
- (ii) $\bot \in FORM$
- (iii) als $\varphi, \psi \in FORM$, dan $(\varphi \vee \psi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \rightarrow \psi) \in FORM$
- (iv) als $\varphi \in FORM$, dan $\$\varphi \in FORM$
- (v) niets is een formule van L_M, tenzij op grond van (i) - (iv).

Formules worden aangeduid door middel van Griekse letters: $\varphi, \psi, \ldots$ We hanteren verder de gebruikelijke conventies omtrent het weglaten van haakjes en we maken gebruik van de volgende afkortingen:

DEFINITIE 1.5

$$\neg\varphi := (\varphi \rightarrow \bot)$$
$$\varphi \leftrightarrow \psi := ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$$
$$\text{Ú}\varphi := \neg\$\neg\varphi$$
$$\varphi \mathbin{-\!\!3} \psi := \$(\varphi \rightarrow \psi)$$

Het formalisme van de modale logica bleek ook te gebruiken voor het analyseren van begrippen van een ander soort dan 'noodzakelijk' en 'mogelijk'. Men verkrijgt bijv.

door $\$\varphi$ te lezen als 'het is verplicht dat φ' een formalisme voor deontische logica (= de logische analyse van normatief redeneren). Overigens vervangt men bij een dergelijke alternatieve interpretatie van het modale formalisme vaak '$\$$' door een meer suggestieve notatie, bijvoorbeeld '$O\varphi$' i.p.v. '$\$\varphi$' voor '$\varphi$ is obligated'. Onder modaliteiten verstaat men tegenwoordig dan ook niet alleen de traditionele modaliteiten als 'noodzakelijk', 'mogelijk' en 'contingent' (deze worden *alethische* modalitieiten, naar het Griekse αληθεια (waarheid), genoemd), maar bijvoorbeeld ook *temporele* modaliteiten ('het zal altijd zo zijn dat', 'het zal eens zo zijn dat', etc.) en *deontische* modaliteiten ('het is verplicht / verboden / toegestaan dat').

Omdat modale logica niet alleen in engere zin wordt opgevat als alethische modale logica, maar ook in ruimere zin als de studie van modale noties van allerlei aard, ligt het voor de hand dat er verschillende modale systemen zijn. Hoewel we spreken van dé modale logica verwijzen we hiermee niet naar één bepaald logisch systeem, zoals we dat in zekere zin wel doen als we de uitdrukking 'de propositielogica' gebruiken. Bijvoorbeeld: het redeneerschema $\$\varphi \ / \ \varphi$ is plausibel voor de alethische noodzakelijkheidsoperator $\$$, maar niet als $\$$ geïnterpreteerd wordt als de deontische verplichtingsoperator.

Zelfs als het soort van modaliteit waar $\$$ voor staat vastligt, is de vraag naar de geldigheid van modale principes vaak controversieel. Intuïties met betrekking tot de betekenis van modale uitdrukkingen zijn in het algemeen namelijk vrij vaag en geven nauwelijks enige aanwijzing omtrent de (on)geldigheid van complexe formules (bijv. $\text{Ú}\varphi \rightarrow \text{Ú}\$\text{Ú}\varphi$). Bij de modale *predikaten*logica (die wij in dit diktaat niet zullen behandelen) heeft men bovendien nog te maken met verschillende opvattingen over de interaktie tussen $\$$ en de kwantoren. (Bijv.: is $\forall x\$\varphi(x) \rightarrow \$\forall x\varphi(x)$ geldig of niet?)

Gelukkig werd er eind jaren '50 een bevredigende formele semantiek voor de modale logica ontwikkeld, waardoor het mogelijk werd de verschillende intuïties aan te scherpen en orde te scheppen in het tot op dat moment onoverzichtelijke oerwoud van modale systemen. Deze semantiek wordt behandeld in in het volgende hoofdstuk. In hoofdstuk 3 introduceren we een aantal eenvoudige maar belangrijke modale systemen en vervolgens beschrijven we in hoofdstuk 4 enkele toepassingen van de modale logica op het gebied van de deontische en epistemische logica (= logische analyse van het redeneren over kennis en geloof.)

2. Semantiek

2.1 Inleiding

Het belang van een formele semantiek voor een systematische studie van logische systemen is boven elke twijfel verheven: als een systeem correct is t.o.v. een bepaalde semantiek, dan kan men m.b.v. een tegenvoorbeeld aantonen dat een bepaalde propositie niet afleidbaar is in het systeem; als een systeem volledig is t.o.v. een bepaalde semantiek, dan kan men zich ervan overtuigen dat er geen principes bestaan die men "vergeten" is om aan het systeem toe te voegen, etc. Het ontwikkelen van een bevredigende formele semantiek voor de modale logica mag dan ook als een belangrijke prestatie binnen de studie van modale logica worden beschouwd. Deze prestatie is toe te schrijven aan Saul Kripke die eind jaren '50 (op zeventienjarige leeftijd) de later naar hem genoemde *Kripke-modellen* of *mogelijke-werelden-modellen* introduceerde (KRIPKE 1959).

Overigens waren iets eerder Stig Kanger en Jaakko Hintikka tot een soortgelijke semantiek gekomen, maar van het (onafhankelijk van elkaar onstane) werk van Kanger, Hintikka en Kripke is dat van de laatste het meest invloedrijk gebleken. (Hier is waarschijnlijk Kripke's superieure presentatie voor een deel debet aan.) Van nog eerder datum stamt Carnap's semantiek voor de modale logica, terwijl er al vanaf de dertiger jaren een traditie bestond waarin gebruik werd gemaakt van een soort van algebraïsche semantiek. Voor de volledigheid melden we nog dat Luckasiewicz heeft gepoogd de modale logica van een waarheidsfunctionele semantiek te voorzien door middel van het toevoegen van extra waarheidswaarden naast 'waar' en 'onwaar'. Deze poging is echter meer van belang geweest voor de ontwikkeling van de meerwaardige logica dan voor die van de modale logica.

Alvorens de formele Kripke-semantiek te beschrijven, geven we eerst een informele uitleg van de interpretatie van $ in Kripke-modellen. Om te komen tot een nadere interpretatie van $ maken we gebruik van het begrip 'mogelijke wereld':

FORMULERING 1: $φ: φ is waar in alle mogelijke werelden

(en dus: Úφ: φ is waar in tenminste één mogelijk wereld).

Wat mogelijke werelden zijn, hoeveel er zijn, etc. is sterk afhankelijk van het soort 'noodzakelijkheid' dat we beschouwen. Het schaakspel kan bijvoorbeeld worden beschouwd als een verzameling mogelijke spelsituaties (toestanden op het bord), waarbij vanuit iedere situatie s een aantal andere situaties via één zet (van wit óf van zwart) bereikt kunnen worden. De (in één zet) vanuit s bereikbare situaties kun je als mogelijke werelden - gezien vanuit s - beschouwen.

Formulering 1 gaat dan over in de volgende iets ingewikkeldere

FORMULERING 2 $\$\varphi$ is waar in s desda φ is waar in alle situaties die vanuit s in één zet bereikbaar zijn.

VOORBEELD 2.1 Neem aan dat in situatie s nog geen van de 16 pionnen verzet is en dat in s' één pion verzet is. Gebruik de volgende vertaalsleutel:

p_1 : tenminste 15 pionnen staan op hun oorspronkelijke plaats
p_2 : precies 15 pionnen staan op hun oorspronkelijke plaats.

Dan geldt: p_1, $\$p_1$, Ú$p_2$ en Ú$\neg p_2$ zijn waar in s; p_2 en $\$p_2$ zijn onwaar in s.
p_1, p_2, Úp_2 en Ú$\neg p_2$ zijn waar in s'; $\$p_1$ en $\$p_2$ zijn onwaar in s',
$\$(p_2 \rightarrow p_1)$ is zelfs waar in *alle* situaties.

Uit voorbeeld 2.1 blijkt dat we er rekening mee moeten houden dat niet altijd iedere wereld - vanuit een andere wereld gezien - mogelijk is, en dat vanuit verschillende werelden ook verschillende verzamelingen van werelden mogelijk kunnen zijn. Vandaar dat we in de Kripke-semantiek gebruik maken van een relatie R tussen werelden die vastlegt welke werelden vanuit welke werelden mogelijk zijn. Deze relatie heet de *bereikbaarheidsrelatie* (of *toegankelijkheidsrelatie*, of *alternatief-relatie*).

We gebruiken letters van het begin van het Griekse alfabet als variabelen voor mogelijke werelden: $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,$... en lezen

$\alpha R\beta$ als: wereld β is mogelijk (of bereikbaar) vanuit wereld α.

In plaats van formulering 2 komen we nu tot de volgende nadere interpretatie van \$:

$\$\varphi$ is waar in α desda φ is waar in elke wereld β die bereikbaar is vanuit α

en dus: Úφ is waar in α desda φ is waar in tenminste één wereld β die bereikbaar is vanuit α.

Merk op dat \$ onder deze interpretatie geen waarheidsfunctioneel connectief is: de waarheidswaarde van $\$\varphi$ in α wordt in het algemeen niet bepaald door de waarheidswaarde van φ in α, maar is afhankelijk van de waarheidswaarde van φ in elke wereld die bereikbaar is vanuit α. (Hetzelfde geldt voor Ú.)

De formele semantiek die we in de volgende paragraaf behandelen is niets anders dan een recht-toe-recht-aan formalisering van het eigenlijk vrij simpele idee dat we zojuist hebben geschetst.

2.2 Modellen voor modale logica

DEFINITIE 2.2 Een *modelstructuur* (of *frame;*) is een geordend paar S = <W,R>, waarbij $W \neq \varnothing$ en $R \subseteq W \times W$.
W heet de verzameling mogelijke werelden van S en R de bereikbaarheidsrelatie van S.

DEFINITIE 2.3 Een *Kripke-model* is een geordend drietal M = <W,R,I>, waarbij <W,R> een modelstructuur is en I een functie van PL×W naar {0,1}. I heet de *interpretatiefunctie* van M.

We schrijven $I(p_i,\alpha) = 1$ in plaats van $I(<p_i,\alpha>) = 1$ en lezen dit als: 'p_i is waar in α'. Evenzo lezen we $I(p_i,\alpha) = 0$ als 'p_i is onwaar in α'.

DEFINITIE 2.4 Zij M = <W,R,I> een Kripke-model. De door M bepaalde *waardering* (of *valuatie*) is de unieke functie V_M van FORM×W naar {0.1} die voldoet aan de volgende semantische regels (voor iedere $p_i \in PL$, voor alle $\varphi,\psi \in FORM$ en voor iedere $\alpha \in W$):

(Sem 0)	$V_M(p_i,\alpha) = I(p_i,\alpha)$		
(Sem $\perp$)	$V_M(\perp,\alpha) = 0$		
(Sem $\wedge$)	$V_M(\varphi\wedge\psi,\alpha) = 1$	desda	$V_M(\varphi,\alpha) = 1$ én $V_M(\psi,\alpha) = 1$
(Sem $\vee$)	$V_M(\varphi\vee\psi,\alpha) = 1$	desda	$V_M(\varphi,\alpha) = 1$ en/of $V_M(\psi,\alpha) = 1$
(Sem $\rightarrow$)	$V_M(\varphi \rightarrow \psi,\alpha) = 1$	desda	$V_M(\varphi,\alpha) = 0$ en/of $V_M(\psi,\alpha) = 1$
(Sem \$)	$V_M(\$\varphi,\alpha) = 1$ desda		voor iedere β met $\alpha R\beta$: $V_M(\varphi,\beta) = 1$.

Voor de gedefinieerde logische constanten hebben we de volgende semantische regels die uit de bovenstaande kunnen worden afgeleid:

(Sem $\neg$)	$V_M(\neg\varphi,\alpha) = 1$ desda		$V_M(\varphi,\alpha) = 0$
(Sem $\leftrightarrow$)	$V_M(\varphi \leftrightarrow \psi,\alpha) = 1$	desda	$V_M(\varphi,\alpha) = V_M(\psi,\alpha)$
(Sem Ú)	$V_M(\text{Ú}\varphi,\alpha) = 1$desda		$V_M(\varphi,\beta) = 1$ voor tenminste één β met $\alpha R\beta$
(Sem —3)	$V_M(\varphi$ —3 $\psi,\alpha) = 1$	desda	voor iedere β met $\alpha R\beta$ en $V_M(\varphi,\beta) = 1$ geldt $V_M(\psi,\beta) = 1$.

Bewijs voor Sem Ú: $V_M(\text{Ú}\varphi,\alpha) = 1$ is per definitie equivalent met $V_M(\neg\$\neg\varphi,\alpha) = 1$. Volgens Sem ¬ is dit gelijkwaardig met $V_M(\$\neg\varphi,\alpha) = 0$, wat volgens Sem \$ weer gelijk staat met: er is minstens één β met aRb zodat $V_M(\neg\varphi,\beta) = 0$, oftewel: er is minstens één β met $\alpha R\beta$ zodat $V_M(\varphi,\beta) = 1$.

Merk op dat uit Sem \$ en Sem Ú ook volgt:

$V_M(\$\varphi,\alpha) = 0$ desda voor tenminste één β met $\alpha R\beta$ geldt: $V_M(\varphi,\beta) = 0$.

$V_M(\text{Ú}\varphi,\alpha) = 0$ desda $V_M(\text{Ú}\varphi,\beta) = 0$ voor iedere β met $\alpha R\beta$

(Dit gevolg van Sem \$ is in het bovenstaande bewijs voor Sem Ú reeds gebruikt.)

Let op! Uit Sem \$ en Sem ⊥ volgt:

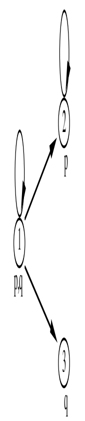
$V_M(\$\varphi,\alpha) = 1$ voor alle $\varphi \in$ FORM desda er is geen β met $\alpha R\beta$.

Een wereld van waaruit geen enkele wereld bereikbaar is (ook die wereld zelf niet!) heet een *blinde* wereld (of *dead end*). In blinde werelden -en alléén daar - zijn alle formules $\$\varphi$ waar! In zulke werelden zijn dan ook alle formules van de vorm $\text{Ú}\varphi$ onwaar:

$V_M(\text{Ú}\varphi,\alpha) = 0$ voor alle $\varphi \in$ FORM desda er is geen β met $\alpha R\beta$.

VOORBEELD 2.5

Zij M = <W,R,I>, waarbij W = {1,2,3}, R = {<1,1>,<2,2>,<1,2>,<1,3>}, I(p,1) = I(q,1) = I(p,2) = I(q,3) = 1 en voor het overige I = 0. (Deze informatie kan in een plaatje worden weergegeven. Zie figuur 1.)



Figuur 1. Kripke-model van voorbeeld 2.5

We berekenen nu de waarheidswaarden van enkele samengestelde formules in een paar werelden. Verwijzingen naar Sem 0 laten we weg.

1. $V_M(\$p,1) = 0$, want 1R3 en $V_M(p,3) = 0$ (Sem \$).
2. $V_M(\$p,2) = 1$, want 2 is de enige wereld α zodat 2Rα en $V_M(p,2) = 1$ (Sem \$).
3. $V_M(\$p,3) = 1$, want 3 is een blinde wereld (Sem \$).
4. $V_M(\text{Ú}p,1) = 1$, want 1R1 en VM(p,1) = 1 (Sem Ú).

5. $V_M(\text{Ú}p,2) = 1$, want 2R2 en VM(p,2) = 1 (Sem Ú).
6. $V_M(\text{Ú}p,3) = 0$, want 3 is een blinde wereld (Sem Ú).
7. $V_M(\text{Ú}q,3) = 0$, idem.
8. $V_M(\$((\text{Ú}\neg p \to q)\wedge(\text{Ú}\neg q \to r)),3) = 1$, want 3 is een blinde wereld (Sem $\$$).
9. $V_M(\$(\text{Ú}\neg p \to q),1) = 1$.
Immers, volgens Sem $\neg$ geldt $V_M(\neg p,2) = 0$. Omdat 2 de enige wereld α is zodat 2Rα volgt met Sem Ú: $V_M(\text{Ú}\neg p,2) = 0$
en vervolgens met Sem $\to$: (i) $V_M(\text{Ú}\neg p \to q,2) = 1$.
Verder geldt $V_M(q,1) = V_M(q,3) = 1$. Sem $\to$ geeft (ii) $V_M(\text{Ú}\neg p \to q,1) = 1$ en
(iii) $V_M(\text{Ú}\neg p \to q,3) = 1$.
Met Sem $\$$ volgt uit (i), (ii), (iii): $V_M(\$(\text{Ú}\neg p \to q),1) = 1$.
10. $V_M(\$(p\vee q),1) = 1$.
Immers, aangezien $V_M(p,1) = 1$ geldt wegens Sem $\vee$ (i) $V_M(p\vee q,1) = 1$.
Evenzo volgt met Sem $\vee$ uit $V_M(p,2) = 1$ dat (ii) $V_M(p\vee q,2) = 1$
en uit $V_M(q,3) = 1$ dat (iii) $V_M(p\vee q,3) = 1$.
Uit (i),(ii) en (iii) volgt nu met Sem $\$$ dat $V_M(\$(p\vee q),1) = 1$.
11. $V_M(\$p \to \$q,2) = 0$.
Immers, $V_M(p,2) = 1$ en 2 is de enige wereld α zodat 2Rα, dus toepassing van Sem $\$$ levert (i) $V_M(\$p,2) = 1$.
Verder geldt 2R2 en $V_M(q,2) = 0$, dus met Sem $\$$ (ii) $V_M(\$q,2) = 0$.
Uit (i) en (ii) volgt met Sem $\to$ dat $V_M(\$p \to \$q,2) = 0$.
12. $V_M(\$p \to \$q,1) = 1$.
Immers, $V_M(p,3) = 0$ en 1R3 dus met Sem $\$$ volgt $V_M(\$p,1) = 0$. Hieruit volgt met Sem $\to$ $V_M(\$p \to \$q,1) = 1$.

2.3 Geldigheid en ongeldigheid in modale logica

In deze paragraaf definiëren we niet alleen een notie van geldigheid in een model en een notie van algemene modaallogische geldigheid (i.e. geldigheid in *alle* modellen voor de modale logica), maar ook het hier in zekere zin tussen liggende begrip van geldigheid in een modelstructuur. (Het belang van dit laatste begrip zal met name in paragraaf 3.3 duidelijk worden.)

DEFINITIE 2.6 Zij $\Gamma \subseteq$ FORM, $\varphi \in$ FORM, M = <W,R,I> een Kripke-model.
(i) Het redeneerschema Γ / φ is *geldig in M* desda voor alle $\alpha \in$ W: als voor alle $\psi \in \Gamma$ $V_M(\psi,\alpha) = 1$, dan $V_M(\varphi,\alpha) = 1$. (In elke wereld in M geldt dat als alle formules van Γ waar zijn, dan is ook φ waar.)

(ii) φ is *geldig in M* desda $\varnothing$ / φ is geldig in M. (In elke wereld in M is φ waar.)

VOORBEELD 2.7 Neem het model M van voorbeeld 2.5. Daar hadden we uitgerekend dat $V_M(\$(p \vee q),1) = 1$. Omdat, zoals we zagen, $V_M(p \vee q,2) = 1$ en 2 de enige α in W is met $2R\alpha$, volgt met Sem $\$$ dat ook $V_M(\$(p \vee q),2) = 1$. Tenslotte geldt $V_M(\$(p \vee q),3) = 1$ omdat 3 een blinde wereld is. Kortom: $\$(p \vee q)$ is geldig in het model M.
Een ander voorbeeld van een formule die geldig is in M is: $\$p \rightarrow \$\$p$.
Niet-geldig in M is bijvoorbeeld: $\$p$. ($V_M(\$p,1) = 0$.)
Een voorbeeld van een redeneerschema dat geldig is in M is: Úp / $\neg\$p$.

DEFINITIE 2.8 Zij $\Gamma \subseteq$ FORM, $\varphi \in$ FORM, S = <W,R> een modelstructuur.
(i) Het redeneerschema Γ / φ is *geldig in S* desda voor alle M = <W,R,I> geldt dat Γ / φ geldig is in M. (In elke uitbreiding van S tot een Kripke-model - door middel van een interpretatiefunctie I - geldt dat het redeneerschema geldig is.)
(ii) φ is *geldig in S* desda $\varnothing$ / φ is geldig in S.

VOORBEELD 2.9 Zij S = <W,R> de modelstructuur van het model van voorbeeld 2.5. $\$(p \vee q)$ is niet geldig in S. Immers, neem een interpretatiefunctie I' met I'(p,2) = I'(q,2) = 0. In het model M' = <W,R,I'> geldt dan: $V_{M'}(p \vee q,2) = 0$ en dus $V_{M'}(\$(p \vee q),2)$. $\$(p \vee q)$ is dus niet geldig in M' en derhalve niet geldig in S.
$\$p \rightarrow \$\$p$ is wel geldig in S. Immers, zij M' = <W,R,I'> een Kripke-model waarin $\$p \rightarrow \$\$p$ niet geldig is. Dan is er een $\alpha \in$ W zodat $V_{M'}(\$p \rightarrow \$\$p,\alpha) = 0$, d.w.z. $V_{M'}(\$p,\alpha) = 1$ en $V_{M'}(\$\$p,\alpha) = 0$ (Sem $\rightarrow$). Aangezien 3 een blinde wereld is, geldt $V_{M'}(\$\$p,\alpha) = 1$, dus $\alpha \neq 3$. Als $\alpha = 2$, dan $V_{M'}(\$p,2) = 1$ en $V_{M'}(\$\$p,2) = 0$. Dit is echter in strijd met Sem $\$$, aangezien alleen 2 bereikbaar is vanuit 2. Dus $\alpha \neq 2$. Maar dan moet gelden $\alpha = 1$ en dus (i) $V_{M'}(\$p,1) = 1$ en (ii) $V_{M'}(\$\$p,1) = 0$. Aangezien 1R2, volgt uit (i) met Sem $\$$ dat $V_{M'}(p,2) = 1$. Wederom toepassen van Sem $\$$ levert $V_{M'}(\$p,2) = 1$. (Alleen 2 is bereikbaar uit 2.) Omdat ook $V_{M'}(\$p,3) = 1$ (3 is een blinde wereld), volgt met Sem $\$$ dat $V_{M'}(\$\$p,1) = 1$. Tegenspraak met (ii). M.a.w., de aanname dat $\$p \rightarrow \$\$p$ niet geldig is in S leidt tot een tegenspraak.
Het redeneerschema Úp / $\neg\$q$ is niet geldig in S. (Ga zelf na waarom niet.)

We hebben in voorbeeld 2.7 gezien dat $\$p \rightarrow \$\$p$ geldig is in de modelstructuur van het model van voorbeeld 2.5. Daaruit volgt geenszins dat deze formule een wet van de modale logica uitdrukt:

VOORBEELD 2.10 $\$p \rightarrow \$\$p$ is niet geldig in de modelstructuur S' = <W',R'> met W' = {1,2,3} en R' = {<1,2>,<2,3>}: Neem maar een interpretatiefunctie I' met I'(p,2) = 1 en I'(p,3) = 0. In het model M' = <W',R',I'> geldt wegens Sem \$ $V_{M'}(\$p,1) = 1$, maar anderzijds wegens Sem \$ $V_{M'}(\$p,2) = 0$ en dus wederom met Sem \$ $V_{M'}(\$\$p,1) = 0$. Met Sem $\rightarrow$ volgt $V_{M'}(\$p \rightarrow \$\$p,1) = 0$.

DEFINITIE 2.11 Zij $\Gamma \subseteq$ FORM, $\varphi \in$ FORM.
(i) Het redeneerschema Γ / φ is (algemeen modaallogisch) *geldig* desda Γ / φ is geldig in iedere modelstructuur. Notatie: Γ ¢ φ (Γ › φ voor "ongeldig".)
(ii) φ is *geldig* desda $\varnothing$ / φ is geldig. Notatie: ¢ φ (› φ voor "ongeldig".)

STELLING 2.12 Γ ¢ φ desda Γ / φ is geldig in alle Kripke-modellen.
Bewijs. Het is duidelijk dat als een redeneerschema geldig is in alle Kripke-modellen, dan is het dat ook in alle modelstructuren. Aan de andere kant, veronderstel dat Γ / φ geldig is in alle modelstrucuren. Zij M = <W,R,I> een willekeurig Kripke-model. Uit de veronderstelling volgt dat Γ / φ geldig is in het modelstructuur <W,R>. Maar dan is Γ / φ geldig in M. ■

In voorbeeld 2.9 zagen we dat › $\$(p \vee q)$ en in voorbeeld 2.10 dat › $\$p \rightarrow \$\$p$. Verder hebben we bijv. ¢ $p \vee \neg p$, ¢ $\$(p \vee \neg p)$ en $\$p, \$(p \rightarrow q)$ ¢ $\$q$ (bewijzen hieronder).

DEFINITIE 2.13 Een modaallogische formule φ heet een *tautologie* desda er een tautologie ψ in de taal van de propositielogica en modaallogische formules $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ zijn zodat φ van de vorm $\psi[p_1 := \varphi_1, ..., p_n := \varphi_n]$ is.
(Een modaallogisch tautologie kan dus worden verkregen uit een tautologie in de taal van de propositielogica door het vervangen van bepaalde propositieletters door modaallogische formules.)

STELLING 2.14 Als φ een tautologie is, dan ¢ φ.
Bewijs. Zij φ een tautologie. Dan is φ van de vorm $\psi[p_1 := \varphi_1, ..., p_n := \varphi_n]$, met ψ een tautologie in de taal van de propositielogica. Zij M = <W,R,I> een willekeurig Kripke-model en $\alpha \in$ W. Dan geldt $V_M(\varphi, \alpha) = 1$. Immers, als we uitgaande van de waarheidwaarden $V_M(\varphi_1, \alpha), .., V_M(\varphi_n, \alpha)$ de waarheidswaarde van φ in α willen uitrekenen, dan hebben we daarvoor hoogstens de semantische regels Sem $\vee$, Sem $\wedge$, Sem $\perp$ en Sem $\rightarrow$ nodig, want ψ is een formule uit de taal van de propositielogica. Die berekening verloopt precies zo als wanneer we $V_{M'}(\psi)$ uitrekenen uitgaande van een waardering$V_{M'}$ met $V_{M'}(p_i) = V_M(\varphi_i, \alpha)$. Uit deze berekening komt 1, want ψ is

een tautologie. Dus ook $V_M(\varphi,\alpha) = 1$. Daar dit voor alle α ∈ W geldt, is φ geldig in M. Daar dit laatste voor alle Kripke-modellen M geldt, volgt ¢ φ. ■

Voorbeelden van toepassingen van stelling 2.14 zijn:

¢ pv¬p, ¢ p → p, maar ook ¢ \$pv¬\$p en ¢ Úq → Úq. In het algemeen geldt voor alle formules φ: ¢ φv¬φ en ¢ φ → φ.

N.B. ¢ \$(pv¬p) volgt *niet* rechtstreeks uit stelling 2.14. Hiervoor gebruikt men:

STELLING 2.15 Als ¢ φ, dan ¢ \$φ ("Geldigheid van Necessitatie".)

Bewijs. Stel ¢ φ. Zij M = <W,R,I> een willekeurig Kripke-model, α ∈ W en αRβ. Uit ¢ φ volgt $V_M(\varphi,\beta) = 1$. Daar dit voor elke β met αRβ geldt, volgt uit Sem \$ dat $V_M(\$\varphi,\alpha) = 1$. Omdat dit weer voor elke α ∈ W geldt, is \$φ geldig in M. En aangezien M willekeurig gekozen was, volgt ¢ \$φ. ■

Merk op dat in het algemeen *niet* geldt φ ¢ \$φ. Bijvoorbeeld: p › \$p. Neem namelijk het model M uit voorbeeld 2.2: $V_M(p,1) = 1$, maar $V_M(\$p,1) = 0$.

Ook *niet* geldig is: Als ψ ¢ φ, dan ψ ¢ \$φ. (Neem ψ maar gelijk aan φ.)

Evenmin geldt \$φ ¢ φ in het algemeen. Bijvoorbeeld: \$p › p. Neem het model M uit voorbeeld 2.2: $V_M(\$p,3) = 1$, maar $V_M(p,3) = 0$.

Men zou dit laatste als een tekortkoming van de Kripke-semantiek kunnen beschouwen, omdat het zeer redelijk lijkt dat iets wat noodzakelijk waar is ook waar is. Als we modale logica in ruime zin opvatten, dat is \$φ / φ in het algemeen echter *niet* geldig. (Denk aan de deontische interpretatie.) We zullen later zien dat er voor verschillende interessante niet-algemeen geldige modale principes (zoals \$φ / φ) natuurlijke klassen van Kripke-modellen te vinden zijn waarin deze principes wel gelden.

STELLING 2.16 \$(φ → ψ),\$φ ¢ \$ψ ("Geldigheid van (\$-)distributie")

Bewijs. Zij M = <W,R,I> een willekeurig Kripke-model, α ∈ W en veronderstel:

(1) $V_M(\$(\varphi \to \psi),\alpha) = 1$, (2) $V_M(\$\varphi,\alpha) = 1$ en (3) αRβ.

Uit (1) en (3) volgt met Sem \$ dat $V_M(\varphi \to \psi,\beta) = 1$. (4)

Uit (2) en (3) volgt met Sem \$ dat $V_M(\varphi,\beta) = 1$. (5)

Uit (4) en (5) volgt met Sem → dat $V_M(\psi,\beta) = 1$.

Daar dit geldt voor alle β met αRβ volgt met Sem \$ dat $V_M(\$\psi,\alpha) = 1$. ■

STELLING 2.17 Als ¢ φ ↔ ψ, dan ¢ σ[p:=φ] ↔ σ[p:=ψ]

("Geldigheid van vervanging van equivalenten".)

Het bewijs van stelling 2.17 slaan we over.

WAARSCHUWING: in de propositielogica geldt $\varphi \leftrightarrow \psi \not\subset \sigma[p:=\varphi] \leftrightarrow \sigma[p:=\psi]$. In de modale logica is dit *niet* geldig. (Zie opgave 2b.)

3 Modale (afleidings)systemen

In dit hoofdstuk definiëren we een beperkt aantal van de meest belangrijke modale systemen als bepaalde Natuurlijke Deductie systemen. Uit praktische overwegingen zullen we ook aangeven hoe op informele wijze met de systemen gewerkt kan worden. Bovendien zullen de verschillende systemen semantisch gekarakteriseerd worden.

3.1 Het systeem K

DEFINITIE 3.1 Het systeem **K** is het deductiesysteem voor modale logica dat bestaat uit de regels voor Natuurlijke Deductie in de propositielogica plus de volgende twee regels:

$$(\text{Distr.})\ \dfrac{\$(\varphi \to \psi) \qquad \$\varphi}{\$\psi}$$

$$(\text{Nec.})\ \dfrac{\varphi}{\$\varphi}$$

SPECIALE VOORWAARDE:
alle hypothesen dienen ingetrokken te zijn op
het moment dat de regel wordt toegepast.

Notatie: $\Gamma \; \%_{\mathbf{K}} \; \varphi$ voor: er is een afleiding in systeem **K** voor de conclusie φ, waarbij alle niet-ingetrokken hypothesen (de premissen) uit Γ afkomstig zijn.

VOORBEELD 3.2 Voorbeeld van een afleiding in **K**:

$$\text{Distr}\ \dfrac{\text{Nec}\ \dfrac{\to\text{I}\ \dfrac{\wedge\text{E}\ \dfrac{[\varphi\wedge\psi]^1}{\varphi}}{(\varphi\wedge\psi) \to \varphi}\,{}^{1}}{\$((\varphi\wedge\psi) \to \varphi)} \qquad [\$(\varphi\wedge\psi)]^2}{\$\varphi}$$

$$\to\text{I}\ \overline{\qquad\qquad\qquad}\ 2$$
$$\$(\varphi\wedge\psi) \to \$\varphi$$

Merk op dat we Distr. net zo goed als axiomaregel (= regel zonder premissen) hadden kunnen formuleren, bijvoorbeeld als:

$$\text{(Distr.')}\ \frac{\qquad\qquad\qquad}{\$(\varphi \to \psi) \to (\$\varphi \to \$\psi)}$$

Immers, Distr.' is een afgeleide regel in **K**, terwijl Distr. kan worden afgeleid in het systeem **K'** dat men verkrijgt als men in **K** Distr. door Distr.' vervangt.

De redelijkheid van het systeem **K** kan als volgt ingezien worden:
In paragraaf 2.3 hebben we de modaallogische geldigheid van een aantal redeneerschema's aangetoond:

(1) als φ een tautologie is, dan is $\varnothing$ / φ geldig.
(2) $\$(\varphi \to \psi)$, $\$\varphi$ / $\$\psi$ is geldig
(3) als $\varnothing$ / φ geldig is, dan is $\varnothing$ / $\$\varphi$ geldig.

Uit (1) kan men afleiden dat de regels van de propositielogica ook in de modale logica opgaan. (2) suggereert de regel Distr., terwijl men Nec. (inclusief de voorwaarde) kan verdedigen door te wijzen op (3). In feite kan men door het bovenstaande uit te werken aantonen dat $\Gamma \,\%_{\mathbf{K}}\, \varphi \;\Rightarrow\; \Gamma \text{ ¢ } \varphi$.

Het is ook mogelijk, hoewel aanzienlijk lastiger, om aan te tonen dat door het systeem **K** de notie van modaallogische geldigheid *volledig* gevat wordt. Er geldt dus:

STELLING 3.3 (Correctheids- en volledigheidsstelling voor **K**)
$\Gamma \,\%_{\mathbf{K}}\, \varphi \;\Leftrightarrow\; \Gamma \text{ ¢ } \varphi$. (Met name geldt: $\%_{\mathbf{K}}\, \varphi \;\Leftrightarrow\; \text{¢ } \varphi$.)

Hoewel we hier geen bewijs voor stelling 3.3 zullen geven, zullen we de stelling zonder enige reserve toepassen.

Uit (het correctheidsgedeelte van) stelling 3.3 volgt dat alles wat in **K** afleidbaar is in feite geldig is uitsluitend op grond van de betekenis van \$ in zoverre deze in termen van de Kripke-semantiek is vastgelegd. **K** is een zekere zin een *minimaal* modaal systeem (**K** heet in de literatuur de *minimale normale modale logica*). Alle modale systemen die wij in het vervolg zullen beschouwen worden verkregen door **K** uit te breiden met extra axioma(regel)s. Semantisch corrspondeert hiermee een nadere bepaling van de betekenis van \$ door het opleggen van eisen aan de bereikbaarheids-relatie R. (Er bestaan wel degelijk modale systemen die geen uitbreidingen van **K** zijn, maar deze vallen buiten het bestek van dit diktaat.)

3.2 Informele afleidingen

Afleidingen binnen een formeel systeem voor de modale logica zijn in het algemeen lastig te vinden. Bij het opstellen van een Natuurlijke Deductie afleiding in de propositielogica wordt men geholpen door het feit dat de hoofdoperator van een formule in hoge mate een correcte voorzetting van de afleiding suggereert. (Bijv.: als men φ → ψ moet bewijzen ligt het voor de hand om naar een bewijs van ψ uit de hypothese φ te gaan zoeken.) In het systeem van Natuurlijke deductie van paragraaf 3.1 is het echter niet duidelijk of een formule $φ afgeleid dient te worden m.b.v. Nec. of m.b.v. Distr. De uitbreidingen van **K** introduceren vaak nog een extra hoeveelheid keuzemogelijkheden. Bovendien kan men te maken krijgen met een lastige "stapeling" van negaties. (Bijv.: het is vrij evident dat ¬ÚÚ¬φ ↔ $$φ geldig is, maar als men deze formule wenst af te leiden in **K**, dient men een afleiding in **K** te geven van ¬¬$¬¬$¬¬φ ↔ $$φ.)

Door middel van het toepassen van een aantal kunstgrepen zou men het Natuurlijke Deductiesysteem van paragraaf 3.1 ietwat praktischer kunnen maken, maar wij kiezen ervoor om in plaats van afleidingen binnen een formeel systeem *informele* afleidingen te gebruiken om aan te tonen dat bepaalde formules afleidbaar zijn binnen een modaal systeem.

VOORBEELD 3.4 Voorbeeld van een informele afleiding van %**K** $(φ∧ψ) → $φ:

i	φ∧ψ → φ	
ii	$(φ∧ψ → φ)	(i,Nec.)
iii	$(φ∧ψ → φ) → ($(φ∧ψ) → $φ)	(Distr.)
iv	$(φ∧ψ) → $φ	(ii,iii)

We zien af van het expliciet vermelden van de gebruikte propositielogische principes en rechtvaardigen een formule door te refereren naar de relevante eerder afgeleide formules en eventueel gebruikte modaallogische principes. De modaallogische principes die gebruikt mogen worden zijn:

a) de afleidingsregel Nec. (onder bepaalde voorwaarde!)
b) de axioma's van het betreffende modale systeem (voor **K** is dat alleen Distr.)
c) de definitie van Ú (Úφ = ¬$¬φ)
d) het vervangen van equivalenten.

Verder moet melding gemaakt worden van het gebruik van hypothesen. Bovendien dient de afhankelijkheid van hypothesen bijgehouden worden, omdat Nec. alleen toegepast mag worden op formules die onafhankelijk van eventuele hypothesen kunnen worden afgeleid. (Dit is de voorwaarde waarop bij (a) wordt gewezen.)

Beschouw voorbeeld 3.4.

i volgt direkt uit de wetten van de propositielogica en behoeft geen rechtvaardiging.
ii volgt uit i door toepassing van Nec. en dient dus op grond van het bovenstaande van de rechtvaardiging (i,Nec.) te worden voorzien.
iii is een substitutie-voorbeeld van Distr.
iv volgt met uitsluitend propositielogica uit ii en iii, zodat (ii,iii) voldoende rechtvaardiging vormt.

VOORBEELD 3.5 $\%_{\mathbf{K}}\ \neg\text{ÚÚ}\neg\varphi \leftrightarrow \$\$\varphi$:

i.	$\$\$\varphi \leftrightarrow \$\$\varphi$	
ii.	$\neg\neg\$\$\varphi \leftrightarrow \$\$\varphi$	(i, $\neg\neg\$\$\varphi$ eq. $\$\$\varphi$)
iii.	$\neg\neg\$\neg\neg\$\varphi \leftrightarrow \$\$\varphi$	(ii, $\neg\neg\$\varphi$ eq. $\$\varphi$)
iv.	$\neg\neg\$\neg\neg\$\neg\neg\varphi \leftrightarrow \$\$\varphi$	(iii, $\neg\neg\varphi$ eq. φ)
v.	$\neg\text{ÚÚ}\neg\varphi \leftrightarrow \$\$\varphi$	(iv, def Ú)

Bij het vervangen van equivalenten vermelden we dus de equivalentie waarvan gebruik gemaakt wordt. De definitie van Ú mag strikt genomen alleen worden gebruikt voor het vervangen van Ú door $\neg\$\neg$ of andersom. Als men bijv. $\$$ door $\neg\text{Ú}\neg$ wenst te vervangen dient men eigenlijk eerst gebruik te maken van de equivalenties $\neg\neg\$\varphi \leftrightarrow \$\varphi$ en $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$. We spreken echter af dat we m.b.v. def Ú ook $\$$, $\neg\$$ en $\$\neg$ mogen vervangen door respectievelijk $\neg\text{Ú}\neg$, $\text{Ú}\neg$ en $\neg\text{Ú}$ (en andersom).

VOORBEELD 3.6 $\neg\text{Ú}\$\varphi\ \%_{\mathbf{K}}\ \$\text{Ú}\neg\varphi$

$\underline{\text{i.}}$	$\neg\text{Ú}\$\varphi$	(hypothese)
$\underline{\text{ii.}}$	$\$\neg\$\varphi$	($\underline{\text{i}}$, def Ú)
$\underline{\text{iii.}}$	$\$\text{Ú}\neg\varphi$	($\underline{\text{ii}}$, def Ú)

In de afleiding van voorbeeld 3.6 is het nummer van regel i onderstreept om aan te geven dat de formule achter i een hypothese is (dat laatste wordt tevens als rechtvaardiging vermeld). Bovendien is het nummer onderstreept van elke regel die een onderstreept nummer in de rechtvaardiging bevat en dus (indirekt) afhangt van een hypothese. In voorbeeld 3.4 is een dergelijke boekhouding van de afhankelijkheid van hypothesen eigenlijk overbodig omdat de regel Nec. niet wordt gebruikt. In het algemeen is een dergelijke boekhouding wel degelijk van belang:

VOORBEELD 3.7 $\varphi \rightarrow \psi, \$\varphi \,/\, \$\psi$ is *niet* geldig, maar als men geen rekening houdt met de voorwaarde voor het toepassen van Nec., dan is $\$\psi$ afleidbaar uit de hypothesen $\varphi \rightarrow \psi$ en $\$\varphi$:

i.	$\$(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\$\varphi \rightarrow \$\psi)$	(Distr.)	
$\underline{\text{ii.}}$	$\varphi \rightarrow \psi$	(hypothese)	
$\underline{\text{iii.}}$	$\$(\varphi \rightarrow \psi)$	($\underline{\text{ii}}$,Nec.)	FOUT!
$\underline{\text{iv}}$	$\$\varphi \rightarrow \$\psi$	(i,$\underline{\text{iii}}$)	
$\underline{\text{v}}$.	$\$\varphi$	(hypothese)	
$\underline{\text{vi}}$	$\$\psi$	($\underline{\text{iv}}$,$\underline{\text{v}}$)	

Het meest eenvoudige tegenvoorbeeld tegen het toepassen van Nec. op van hypothesen afhankelijke formules is natuurlijk het schema $\varphi \,/\, \$\varphi$.

Voordat we verdere voorbeelden van informele afleidingen geven, volgt eerst een meer exacte beschrijving van de eisen die we aan dergelijke afleidingen stellen:

DEFINITIE 3.8 Een *(informele) afleiding in systeem **S*** bestaat uit een reeks van opeenvolgend genummerde modaallogische formules voorzien van een rechtvaardiging in **S**, waarbij we tot een rechtvaardiging in **S** van φ met nummer n rekenen:

a) (Ax.) als Ax. een axioma(schema) van **S** is waarvan φ een instantie is.

b) (m, def Ú) als m < n en φ kan worden verkregen uit de formule ψ met nummer m door toepassing van de definitie van Ú.

c) (m, ψ eq. χ) als m < n en φ kan worden verkregen uit de formule φ' met nummer m door het vervangen van minstens één voorkomen van χ in φ' door ψ.

d) ($m_1,...,m_k$) als $m_1 < n,....m_k < n$ en φ volgt m.b.v. de regels van de propositielogica uit de formules met nummers $m_1,...,m_k$.

e) (m,Nec.) als m < n, $\varphi = \$\psi$, ψ is de formule met nummer m en m is niet ondersteept.

f) (hypothese) als φ een hypothese is.

Het nummer van φ wordt onderstreept als φ de rechtvaardiging "(hypothese)" heeft. Tevens worden de nummers onderstreept van die formules die in hun rechtvaardiging een onderstreept nummer bevatten.

Omdat een informele afleiding in **S** in principe omgezet kan worden tot een formele afleiding binnen **S**, noteren we 'φ is informeel afleidbaar in **S**' ook als $\Gamma \,\%_{\mathbf{S}}\, \varphi$.

VOORBEELD 3.9 %K $(φ∧ψ) → ($φ∧$ψ)

i.	φ∧ψ → φ	
ii.	$(φ∧ψ → φ)	(i,Nec.)
iii.	$(φ∧ψ → φ) → ($(φ∧ψ) → $φ)	(Distr.)
iv.	$(φ∧ψ) → $φ	(ii,iii)
v.	φ∧ψ → ψ	
vi.	$(φ∧ψ → ψ)	(v,Nec.)
vii.	$(φ∧ψ → φ) → ($(φ∧ψ) → $ψ)	(Distr.)
viii.	$(φ∧ψ) → $ψ	(vi,vii)
ix.	$(φ∧ψ) → ($φ∧$ψ)	(iv,viii)

Merk op dat het in voorbeeld 3.9 ook mogelijk was geweest om iv en viii weg te laten en de rechtvaardiging van ix te vervangen door (ii,iii,vi,vii). Hoeveel details men van het propositionele gedeelte dient op te nemen is niet vastgelegd. Men is noch verplicht om alle details te verstrekken, noch om het propositionele gedeelte in zo weinig mogelijk stappen te comprimeren. Een goede middenweg is om tussenresultaten te vermelden daar waar men vermoedt dat dit verhelderend werkt.

Een veelvuldig optredend redeneerpatroon is de afleiding van n. $φ → $ψ uit m. φ → ψ met behulp van Nec. en Distr. We spreken af dat we deze afleiding in één stap mogen afhandelen. De betreffende regel voorzien we dan van de rechtvaardiging (m,Nec.,Distr.), waarbij m natuurlijk niet onderstreept mag zijn.

VOORBEELD 3.10 %K (Úφ ∧ $(φ → $φ)) → Ú$φ

i.	¬$φ → (($φ ∨ ¬φ) → ¬φ)	
ii.	$¬$φ → $ (($φ ∨ ¬φ) → ¬φ))	(i,Nec.,Distr.)
iii.	$ (($φ ∨ ¬φ) → ¬φ)) → ($ ($φ ∨ ¬φ) →$¬φ)	(Distr.)
iv.	$¬$φ → ($ ($φ ∨ ¬φ) → $¬φ)	(ii,iii)
v.	¬($ ($φ ∨ ¬φ) → $¬φ) → ¬$¬$φ	(iv)
vi.	¬($ (φ → $φ) → $¬φ) → ¬$¬$φ	(v, φ → $φ eq. $φ ∨ ¬.)
vii.	(¬$¬φ ∧ $(φ → $φ)) → ¬$¬$φ	(vi, ¬$¬φ ∧ $(φ → $φ) eq. ¬($(φ → $φ) → $ ¬φ))
viii.	(Úφ ∧ $(φ → $φ)) → Ú$φ	(vii, def Ú)

3.3 Uitbreidingen van K

Er bestaat een zodanige hoeveelheid aan modale systemen dat het gewenst is enige systematiek in de naamgeving van die systemen aan te brengen. Dit is helaas nooit werkelijk gelukt, mede wegens het feit dat een aantal niet-systematische namen ingeburgerd is geraakt. We zullen van een relatief klein aantal bekende sytemen zowel de traditionele als een meer systematische naam vermelden.

We geven eerst een aantal belangrijke schema's een naam:

D.	$\$\phi \rightarrow \acute{U}\phi$	(<u>D</u>eontic)
T.	$\$\phi \rightarrow \phi$	
B.	$\phi \rightarrow \$\acute{U}\phi$	(<u>B</u>rouwer)
4;.	$\$\phi \rightarrow \$\$\phi$	
5.	$\acute{U}\phi \rightarrow \$\acute{U}\phi$	

D speelt een belangrijke rol in deontische logica's. 4 en 5 zijn de karakteristieke axioma's van Lewis' **S4** en **S5**. T is het karakteristieke axioma van het systeem **T**, dat zo werd genoemd door Feys. Brouwers naam is gelieerd aan B vanwege het feit dat Oskar Becker een overeenkomst zag tussen een bepaald modaal systeem (**KTB**) en intuïtionistische logica.

De logica's die verkregen worden door één of meer van bovenstaande axioma's of overeenkomstige regels aan **K** toe te voegen kunnen worden aangeduid door de namen van de betreffende axioma's achter '**K**' te plaatsen. Voor ons zijn met name relevant:

systematische naam	traditionele naam	
KT	**T**	(= Gödel/Feys/von Wright systeem)
KT4	**S4**	
KT45	**S5**	
KD	deontische **T**	
KD4	deontische **S4**	
KD45	deontische of zwakke **S5**	
K45	zwakke **S5**	

Merk op dat de traditionele namen niet altijd éénduidig zijn (zowel **KD45** als **K45** worden soms "zwakke **S5**" genoemd. Verschillende systematische namen kunnen equivalente systemen aanduiden. (Er geldt bijv. **KT45** = **KT5** = **KT4B** = **KDB4**.)

We schrijven "$\Gamma\ \%_{\mathbf{KT}}\ \phi$" ("$\Gamma\ \%_{\mathbf{KT4}}\ \phi$", etc.) voor "$\phi$ is afleidbaar uit Γ in systeem **KT** (**KT4,** etc.)".

VOORBEELD 3.11 $\%_{\mathbf{T}}\ \$\varphi \to \text{Ú}\varphi$

i.	$\$\varphi \to \varphi$	(T)
ii.	$\neg\$\bot$	(i)
iii	$\$(\varphi \to \bot) \to (\$\varphi \to \$\bot)$	(Distr.)
iv.	$(\$\neg\varphi \wedge \$\varphi) \to \$\bot$	(iii)
v.	$\neg(\$\neg\varphi \wedge \$\varphi)$	(ii,iv)
vi.	$\$\varphi \to \neg\$\neg\varphi$	(v)
vii	$\$\varphi \to \text{Ú}\varphi$	(vi, def Ú)

VOORBEELD 3.12 $\%_{\mathbf{KD}}\ \neg\$\bot$

i.	$\$\varphi \to \neg\$\neg\varphi$	(D)
ii.	$\varphi\wedge\neg\varphi \to \varphi$	
iii.	$\$(\varphi\wedge\neg\varphi) \to \$\varphi$	(ii,Nec.,Distr.)
iv.	$\varphi\wedge\neg\varphi \to \neg\varphi$	
v.	$\$(\varphi\wedge\neg\varphi) \to \$\neg\varphi$	(iv,Nec.,Distr.)
vi.	$\neg\$(\varphi\wedge\neg\varphi)$	(i,iii,v)
vii.	$\neg\$\bot$	(vi, $\bot$ eq. $\varphi\wedge\neg\varphi$)

VOORBEELD 3.13 $\text{Ú}\varphi\ \%_{\mathbf{S5}}\ \text{Ú}\$\text{Ú}\varphi$

i.	$\text{Ú}\varphi$	(hypothese)
ii.	$\text{Ú}\varphi \to \$\text{Ú}\varphi$	(5)
iii.	$\$\text{Ú}\varphi$	(i,ii)
iv.	$\$\text{Ú}\varphi \to \$\$\text{Ú}\varphi$	(4)
v.	$\$\$\text{Ú}\varphi$	(iii,iv)
vi.	$\$\$\text{Ú}\varphi \to \text{Ú}\$\text{Ú}\varphi$	(T, Distr., def Ú [zie voorbeeld 3.11])
vii.	$\text{Ú}\$\text{Ú}\varphi$	(v,vi)

De rechtvaardiging in regel vi van voorbeeld 3.13 is strikt genomen niet volgens de regels van paragraaf 3.2. We spreken af dat in de rechtvaardigingen vanaf nu ook naar een eerder afgeleid resultaat mag worden verwezen, mits (1) alle axioma's worden vermeld die in de afleiding waarnaar verwezen wordt zijn gebruikt en (2) in de afleiding waarnaar verwezen wordt geen hypothesen zijn gebruikt. Vanzelfsprekend dient ook een duidelijke verwijzing naar het gebruikte reeds eerder afgeleide resultaat in de rechtvaardiging te worden opgenomen.

VOORBEELD 3.14 $\%_{\mathbf{KD}}\ \text{Ú}(\varphi\vee\neg\varphi)$

i.	$\neg\$\bot$	(D,Nec.,Distr. [zie voorbeeld 3.12])
ii.	$\neg\$\neg(\varphi\vee\neg\varphi)$	(i,$\neg(\varphi\vee\neg\varphi)$ eq. $\bot$)

iii. $\acute{U}(\varphi \vee \neg\varphi)$ (ii,def $\acute{U}$)

DEFINITIE 3.15
(i) Een relatie R heet *reflexief* desda $\forall x\, xRx$.
(ii) Een relatie R heet *symmetrisch* desda $\forall xy\, (xRy \rightarrow yRx)$.
(iii) Een relatie R heet *transitief* desda $\forall xyz\, ((xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz)$
(iv) Een relatie R heet *voortzettend* (Engels: *serial*)) desda $\forall x \exists y\, xRy$.
(v) Een relatie R heet *euclidisch* desda $\forall xyz\, ((xRy \wedge xRz) \rightarrow yRz)$.

DEFINITIE 3.16 Een model $M = \langle W,R,I \rangle$ en een modelstructuur $S = \langle W,R \rangle$ heten reflexief (symmetrisch,transitief,etc.) desda R reflexief (symmetrisch,transitief,etc.) is.

STELLING 3.17 De volgende vier uitspraken zijn equivalent:
(1) R is een equivalentierelatie (d.w.z. R is reflexief, transitief en symmetrisch.)
(2) R is reflexief, transitief en euclidisch
(3) R is reflexief en euclidisch
(4) R is voortzettend, transitief en symmetrisch.
Bewijs. OPGAVE.

STELLING 3.18 Voor alle $\varphi \in$ FORM:
(1) $\$\varphi/\varphi$ (T) is geldig op alle reflexieve modelstructuren
(2) $\$\varphi/\$\$\varphi$ (4) is geldig op alle transitieve modelstructuren
(3) $\varphi/\$\acute{U}\varphi$ (B) is geldig op alle symmetrische modelstructuren
(4) $\$\varphi/\acute{U}\varphi$ (D) is geldig op alle voortzettende modelstructuren
(5) $\acute{U}\varphi/\$\acute{U}\varphi$ (5) is geldig op alle euclidische modelstructuren
Bewijs.
(1) Zij $M = \langle W,R,I \rangle$ reflexief, $\alpha \in W$ en $V_M(\$\varphi,\alpha) = 1$.
Omdat R reflexief is geldt $\alpha R\alpha$ en dus wegens Sem \$ ook $V_M(\varphi,\alpha) = 1$.
(2) Zij $M = \langle W,R,I \rangle$ transitief, $\alpha \in W$ en $V_M(\$\varphi,\alpha) = 1$. Stel $V_M(\$\$\varphi,\alpha) = 0$.
Dan is er wegens Sem \$ een $\beta \in W$ met $\alpha R\beta$ en $V_M(\$\varphi,\beta) = 0$.
Dus er is (weer wegens Sem \$) een $\gamma \in W$ met $\beta R\gamma$ en $V_M(\varphi,\gamma) = 0$ (*).
Wegens de transitiviteit van R en $V_M(\$\varphi,\alpha) = 1$ geldt echter $V_M(\varphi,\gamma) = 1$ (**).
(*) en (**) leveren een tegenspraak op. Dus $V_M(\$\$\varphi,\alpha) = 1$.
(3) OPGAVE.
(4) Zij $M = \langle W,R,I \rangle$ voortzettend, $\alpha \in W$ en $V_M(\$\varphi,\alpha) = 1$.
R is voortzettend, dus is er een β met $\alpha R\beta$. Omdat $V_M(\$\varphi,\alpha) = 1$ geldt $V_M(\varphi,\beta) = 1$.
Dus $V_M(\acute{U}\varphi,\alpha) = 1$.

(5) Zij $M = \langle W,R,I\rangle$ euclidisch, $\alpha \in W$ en $V_M(\text{Ú}\varphi,\alpha) = 1$. Stel $V_M(\$\text{Ú}\varphi,\alpha) = 0$.
Dan is er een $\beta \in W$ met $\alpha R\beta$ en $V_M(\text{Ú}\varphi,\beta) = 0$ (*).
Omdat $V_M(\text{Ú}\varphi,\alpha) = 1$ is er een γ met $\alpha R\gamma$ zodat $V_M(\varphi,\gamma) = 1$.
Maar wegens de euclidiciteit van R geldt $\beta R\gamma$ en dus $V_M(\text{Ú}\varphi,\beta) = 1$ (**).
(*) en (**) leveren een tegenspraak op. Dus $V_M(\$\text{Ú}\varphi,\alpha) = 1$. ■

STELLING 3.19 Zij S een modelstructuur.

(1)	Voor alle $\phi \in$ FORM	$\$\varphi/\varphi$ is geldig op S	$\Rightarrow$	S is reflexief.
(2)	Voor alle $\phi \in$ FORM	$\$\varphi/\$\$\varphi$ is geldig op S	$\Rightarrow$	S is transitief.
(3)	Voor alle $\phi \in$ FORM	$\varphi/\$\text{Ú}\varphi$ is geldig op S	$\Rightarrow$	S is symmetrisch.
(4)	Voor alle $\phi \in$ FORM	$\$\varphi/\text{Ú}\varphi$ is geldig op S	$\Rightarrow$	S is voortzettend.
(5)	Voor alle $\phi \in$ FORM	$\text{Ú}\varphi/\$\text{Ú}\varphi$ is geldig op S	$\Rightarrow$	S is euclidisch.

Bewijs.
(1) Zij $S = \langle W,R\rangle$ niet reflexief, i.e. er is een $\alpha \in W$ zodat $\neg\alpha R\alpha$.
Beschouw $M = \langle W,R,I\rangle$ met $I(p,\beta) = 1$ voor alle β met $\alpha R\beta$ en voor de rest $I = 0$.
Dan $V_M(\$p,\alpha) = 1$ en $V_M(p,\alpha) = 0$. Dus $\$p/p$ is niet geldig op S.
(2) Zij $S = \langle W,R\rangle$ niet transitief, i.e. er zijn $\alpha,\beta,\gamma \in W$ zodat $\alpha R\beta$, $\beta R\gamma$ en $\neg\alpha R\gamma$.
Beschouw $M = \langle W,R,I\rangle$ met $I(p,\beta) = 1$ voor alle β met $\alpha R\beta$ en voor de rest $I = 0$.
Dan geldt enerzijds $V_M(\$p,\alpha) = 1$, maar anderzijds $V_M(\$\$p,\alpha) = 0$, want $\alpha R\beta$ en $V_M(\$p,\beta) = 0$ (wegens $\beta R\gamma$ en $V_M(p,\gamma) = 0$). Dus $\$p/\$\$p$ is niet geldig op S.
(3) Zij $S = \langle W,R\rangle$ niet symmetrisch, i.e. er zijn $\alpha,\beta \in W$ zodat $\alpha R\beta$ en $\neg\beta R\alpha$.
Beschouw $M = \langle W,R,I\rangle$ met $I(p,\beta) = 1$ en voor de rest $I = 0$.
Dan $V_M(p,\alpha) = 1$. Maar $\alpha R\beta$ en $V_M(\text{Ú}p,\beta) = 0$, dus met Sem \$: $V_M(\$\text{Ú}p,\alpha) = 0$.
Dus $p/\$\text{Ú}p$ is niet geldig op S.
(4) & (5) OPGAVE. ■

Tegen de achtergrond van stellingen 3.18 en 3.19 zullen de volgende correctheids- en volledigheidsstellingen geen verbazing wekken:

STELLING 3.20

(1)	$\Gamma \,\%_{\mathbf{KT}}\, \varphi$	$\Leftrightarrow$	Γ / φ is geldig in alle reflexieve modellen. ($\Gamma \,¢_{\mathbf{KT}}\, \varphi$ of $\Gamma \,¢_{\mathbf{T}}\, \varphi$)
(2)	$\Gamma \,\%_{\mathbf{K4}}\, \varphi$	$\Leftrightarrow$	Γ / φ is geldig in alle transitieve modellen. ($\Gamma \,¢_{\mathbf{K4}}\, \varphi$)
(3)	$\Gamma \,\%_{\mathbf{KB}}\, \varphi$	$\Leftrightarrow$	Γ / φ is geldig in alle symmetrische modellen. ($\Gamma \,¢_{\mathbf{KB}}\, \varphi$)
(4)	$\Gamma \,\%_{\mathbf{KD}}\, \varphi$	$\Leftrightarrow$	Γ / φ is geldig in alle voortzettende modellen. ($\Gamma \,¢_{\mathbf{KD}}\, \varphi$)
(5)	$\Gamma \,\%_{\mathbf{K5}}\, \varphi$	$\Leftrightarrow$	Γ / φ is geldig in alle euclidische modellen. ($\Gamma \,¢_{\mathbf{K5}}\, \varphi$)

Ook de correctheids- en volledigheidsstellingen voor systemen met een combinatie van axiomaschema's zijn niet verrassend:

STELLING 3.21

(1) Γ %$_{\mathbf{KT4}}$ φ ⇔ Γ / φ is geldig in alle reflexieve, transitieve modellen. (Γ ¢$_{\mathbf{KT4}}$ φ of Γ ¢$_{\mathbf{S4}}$ φ)

(2) Γ %$_{\mathbf{KT45}}$ φ ⇔ Γ / φ is geldig in alle reflexieve, transitieve en euclidische modellen. (Γ ¢$_{\mathbf{KT45}}$ φ of Γ ¢$_{\mathbf{S5}}$ φ)

(3) Γ %$_{\mathbf{KD4}}$ φ ⇔ Γ / φ is geldig in alle voortzettende, transitieve modellen. (Γ ¢$_{\mathbf{KD4}}$ φ)

(4) Γ %$_{\mathbf{KD45}}$ φ ⇔ Π/ φ is geldig in alle voortzettende, transitieve en euclidische modellen. (Π¢$_{\mathbf{KD45}}$ φ)

(5) Γ %$_{\mathbf{K45}}$ φ ⇔ Γ / φ is geldig in alle transitieve, euclidische modellen. (Γ ¢$_{\mathbf{K45}}$ φ).

Net als in het geval van **K** zullen we deze correctheids- en volledigheidsstellingen niet bewijzen, maar wel gebruiken. Merk op dat voor het onthouden van bovenstaande resultaten het voldoende is om in gedachten te houden met welke eigenschap van de bereikbaarheidsrelatie de schema's D,T,B,4 en 5 corresponderen (T - reflexiviteit, 4 - transitiviteit, etc.). Ook bij het *bewijzen* van stellingen als 3.20 en 3.21 kan men vaak dankbaar gebruik maken van dergelijke correspondenties tussen modale formules en eigenschappen van de bereikbaarheidsrelatie van de modelstructuren waarin de formules gelden. (De systematische studie van dergelijke correspondenties wordt correspondentietheorie genoemd.)

Uit stelling 3.17 en stelling 3.21 volgt dat het traditioneel zeer bekende systeem **S5** verschillende systematische formuleringen (**KT45**, **KT5**, **KT4B** en **KD4B**) en de volgende eenvoudige semantische karakterisering heeft:

Γ %$_{\mathbf{S5}}$ φ ⇔ Γ / ϕ is geldig in alle modellen M = <W,R,I> met R een equivalentierelatie.

VOORBEELD 3.22 ‹$_{\mathbf{T}}$ ÚÚφ → Úφ

Zij M = <W,R,I>, met W = {1,2,3}, R = {<1,1>,<1,2>,<2,2>,<2,3>,<3,3>}, I(p,3) = 1 en voor de rest I = 0. Dan geldt V_M(ÚÚp → Úp,1) = 0 (Ga na). R is reflexief (Ga na), dus ›$_{\mathbf{T}}$ ÚÚφ → Úφ. Met stelling 3.20(1) volgt ‹$_{\mathbf{T}}$ ÚÚφ → Úφ.

VOORBEELD 3.23 ‹$_{\mathbf{KD}}$ $φ → φ

Zij M = <W,R,I>, met W = {1,2}, R = {<1,2>,<2,2>}, I(p,2) = 1 en voor de rest I = 0. Dan geldt $V_M(\$p \rightarrow p.1) = 0$ (Ga na). R is voortzettend (Ga na), dus $›_{\mathbf{KD}}\ \$\varphi \rightarrow \varphi$. Met stelling 3.20(4) volgt $‹_{\mathbf{KD}}\ \$\varphi \rightarrow \varphi$.

VOORBEELD 3.24 $‹_{\mathbf{K45}}\ \$\varphi \rightarrow Ú\varphi$

Zij M = <W,R,I>, met W = {1}, R = ∅ en I = 0. Dan geldt $V_M(\$p \rightarrow Úp,1) = 0$ (Ga na). R is transitief en euclidisch, dus $›_{\mathbf{K45}}\ \$\varphi \rightarrow \varphi$. Met stelling 3.21(5) volgt $‹_{\mathbf{K45}}$ $\$\varphi \rightarrow \varphi$.

DEFINITIE 3.25 Zij **S** en **S'** modale systemen. **S** heet *(zwak) sterker dan* **S'** (**S** ≥ **S'**) als alles wat in **S'** afleidbaar is ook in **S** afleidbaar is. **S** heet *strikt sterker dan* **S'** (**S** > **S'**) als **S** ≥ **S'** en niet **S'** ≥ **S**.

STELLING 3.26 De relaties ≥ en > op {**K**,**KT**,**KT4**,**KT45**,**KD**,**KD4**,**KD45**,**K45**} kunnen worden afgelezen uit het volgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{KT45} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{KD45} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{K45} \arrow[dd] \\
\mathbf{KT4} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{KD4} \arrow[d] & \\
\mathbf{KT} \arrow[r] & \mathbf{KD} \arrow[r] & \mathbf{K}
\end{tikzcd}$$

Een pijl van **S** naar **S'** betekent dat **S'** > **S**. Verder geldt natuurlijk dat zowel > als ≥ transitief zijn en dat ≥ ook nog reflexief is.
Bewijs. OPGAVE.

VOORBEELD 3.27

Beschouw de volgende, enigszins vrije, weergave van een volgens Alvin Plantinga (PLANTINGA 1974) "victorious modal version" van een godsbewijs:

Definitie: een entiteit met de eigenschap van maximale grootheid noemen we een DOG (Ding dat Onmogelijk Groter kan).
Zij ψ de volgende uitspraak: "Er bestaat een DOG".
We gaan uit van het volgende:
(i) De eigenschap van maximale grootheid impliceert de eigenschap van maximale grootheid in alle mogelijke werelden.
(ii) De eigenschap van maximale grootheid is vervulbaar.
(i) laat zich vertalen in: ψ —3$\$\psi$, ofwel $\$(\psi \rightarrow \$\psi)$ (*)

(ii) is symbolisch weer te geven met: Úψ (**)
Uit (*) en (**) volgt ψ.

De redenering is niet geldig in **S4**. Immers het volgende reflexieve en transitieve model vormt een tegenvoorbeeld tegen het redeneerschema $(φ → $φ),Úφ / φ:
M = <W,R,I>, met W = {1,2}, R = {<1,1>,<1,2>,<2,2>}, I(p,2) = 1 en voor de rest I = 0. Er geldt V_M($(p → $p,1) = 1 en V_M(Úp,1) = 1, maar V_M(p,1) = 0.

Wegens stelling 3.21 is het redeneerschema ook niet geldig in **K** en **T**. Immers, **S4** is sterker dan **K** en **T**, dus als φ in **K** of **T** uit $(φ → $φ) en Úφ afleidbaar zou zijn dan a fortiori ook in **S4**. Hetzelfde feit kan men ook semantisch inzien: een **S4**-tegenmodel tegen een redeneerschema is namelijk meteen een **T**-tegenmodel en een **K**-tegenmodel.

Het redeneerschema $(φ → $φ),Úφ / φ wél geldig in **KB**:

i.	(Úφ ∧ $(φ → $φ)) → Ú$φ	(Nec.,Distr.,[zie voorbeeld 3.7])
ii.	Úφ	(hypothese)
iii.	$(φ → $φ)	(hypothese)
iv.	Ú$φ	(i,ii,iii)
v.	¬$Ú¬φ	(iv,def Ú)
vi.	¬φ → $Ú¬φ	(B)
vii.	φ	(v,vi)

Uit stelling 3.20 volgt dat het schema geldig is in alle symmetrische modellen. (Dit kan men ook aantonen zonder te verwijzen naar stelling 3.20.) A fortiori is het redeneerschema dus geldig in alle reflexieve, transitieve, symmetrische modellen en dus wegens stelling 3.21 in **S5**, dat door velen wordt beschouwd als een redelijk systeem voor de alethische modale logica. Dus de modaallogische vooronderstellingen in Plantinga's godsbewijs zijn niet al te bizar.

Naast het analyseren van argumentaties waarin alethische modaliteiten worden gebruikt, is modale logica op verschillende andere terreinen toegepast. Hierop wordt in het volgende hoofdstuk ingegaan.

4. Toepassingen van modale logica

Behalve voor de studie van alethische modale logica is het begrippenapparaat van de modale logica gebruikt voor in o.a. de volgende takken van de logica:

deontische logica: zie paragraaf 4.1 (ÅQVIST 1984, HILPINEN 1971,1981)
epistemische logica: zie paragraaf 4.2 (HALPERN 1986, HINTIKKA 1962, LENZEN 1978, VARDI 1988)
tijdslogica: bedoeld voor het analyseren van de rol die de tijd speelt in redeneringen door bijvoorbeeld de eigenschappen van de vooronderstelde temporele ontologie expliciet te maken of door het formaliseren van de werkwoordstijden. Tegenwoordig is tijdslogica ook van belang voor het geven van een formele beschrijving van het (gewenste) gedrag van geautomatiseerde systemen. Het begrippenapparaat van de modale logica is relevant voor tijdslogica omdat men de bereikbaarheidsrelatie temporeel kan interpreteren: $\alpha R \beta$ desda β is later / heeft een later tijdstip dan α. $\$\varphi$ (in dit kader genoteerd als $G\varphi$) krijgt dan de betekenis "φ zal altijd het geval zijn". (VAN BENTHEM 1983, BURGESS 1984)
intuïtionistische logica: formalisering van de in de intuïtionistische wiskunde geldige redeneerprincipes. KRA is bijvoorbeeld niet intuïtionistisch geldig, alle andere regels van het Natuurlijke Deductiesysteem van Parvulae Logicales II wél. Eén van de semantieken van de intuïtionistische logica maakt gebruik van Kripke-modellen. (N.B. in de intuïtionistische logica geldt niet dat elke propostie ofwel waar ofwel onwaar is, dus de semantieken van de propositielogica van Parvulae Logicales II en III zijn geen semantieken voor de intuïtionistische (propositie)logica.) (SMORYN,´SKI 1973)
bewijsbaarheidslogica: formalisering van de eigenschappen van formele bewijsbaarheid, met name van bewijsbaarheid in het systeem voor de rekenkunde **PA** (Peano's Arithmetic). Deze eigenschappen bleken verrassend genoeg op bevredigende wijze met behulp van een eenvoudig modaal systeem beschreven te kunnen worden. (BOOLOS 1979, SMORYN,´SKI 1984, 1985)
dynamische logica: bedoeld als middel om te redeneren over (computer)-programma's. Programma's worden geïnterpreteerd als bereikbaarheidsrelaties in Kripke-modellen. Als R de interpretatie van een programma P is, dan betekent $\alpha R \beta$ dat β een mogelijke (eind)toestand is van het uitvoeren van P in (start)toestand α. Als in alle γ met $\alpha R \gamma$ φ geldt (m.a.w. als $\$\varphi$ in α geldt), dan zal φ waar zijn na het uitvoeren van P startend vanuit α (om de afhankelijkheid van P via R expliciet te maken schrijft men wel $[P]\varphi$ in plaats van $\$\varphi$). Dynamische logica wordt ook gebruikt voor de logica van handelingen (van zowel mens als machine).(HAREL 1969,1984).

4.1 Deontische logica

Deontische logica is de logische studie van redeneringen waarin normatieve (met name ethische) uitdrukkingen, zoals 'het behoort/is verplicht dat..', 'het is verboden dat..' en 'het is toegestaan dat..' een rol spelen. De belangstelling van juristen en ethici voor deontische logica zal geen verbazing wekken. Minder voor de hand liggend is dat er ook in de computerwetenschappen belangstelling bestaat voor een logische analyse van dergelijke uitdrukkingen teneinde bepaalde constraints formeel te beschrijven (bijv. 'het programma behoort elke toegestane mogelijkheid na te gaan').

De hierboven genoemde normatieve uitdrukkingen worden doorgaans gerepresenteerd met behulp van de deontische operatoren 'O' en 'P':

$O\varphi$: het behoort/is verplicht dat φ (Obligatory)
$P\varphi$: het is toegestaan dat φ(Permitted)

Merk op dat '$O\neg\varphi$' gelezen kan worden als 'het is verboden dat φ' en dat bijgevolg '$\neg O\neg\varphi$'' ('het is niet verboden dat $\neg\varphi$') intuïtief dezelfde betekenis heeft als '$P\varphi$'. Net als \$ en Ú zijn O en P dus interdefinieerbaar. De overeenkomst tussen O en P enerzijds en \$ en Ú anderzijds gaat nog verder omdat men O en P ook in termen van bepaalde mogelijke werelden kan interpreteren:

DEFINITIE 4.1 Een mogelijke wereld β heet een *deontisch alternatief* van een mogelijke wereld α als β mogelijk is vanuit α en als bovendien β deontisch perfekt is, d.w.z. als in β alleen datgene wat toegestaan is het geval is (en dus aan alle normen voldaan is).

Schrijf '$\alpha R\beta$' voor 'β is een deontisch alternatief van α''. Dan:

$O\phi$ is waar in α desda ϕ is waar in alle β met $\alpha R\beta$.
$P\phi$ is waar in α desda ϕ is waar in tenminste één β met $\alpha R\beta$.

In vergelijking met de alethische modale logica wordt de rol van \$ (Ú) overgenomen door O (P) en is verder alleen de intuïtieve betekenis van de bereikbaarheidsrelatie R gewijzigd. Het systeem **K** (in deontische vermomming, dus met O i.p.v. \$, ook wel **OK** genoemd) vormt dan ook net zo goed een basis voor de modale systemen van deontische logica als voor de systemen van de alethische modale logica. In het bijzonder worden **K**-geldige schema's als $O(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (O\varphi \rightarrow O\psi)$ en $O(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (O\varphi \wedge O\psi)$ als geldige deontische principes opgevat. Bovendien geldt wegens Necessitatie: $O(\varphi \vee \neg\phi)$. Dat betekent dat triviale normatieve systemen waarin *niets* verplicht is uitgesloten worden.

De deontische interpretatie van T (als het behoort dat φ, dan φ) is niet zo'n plausibel principe. Het ligt dus niet voor de hand om in het kader van deontische logica **K** met T uit te breiden. Het (zwakkere) axiomaschema D komt echter wel degelijk in aanmerking. Het is namelijk een sterke versie van het bekende adagium "ought implies can": "als het behoort dat φ, dan is het toegestaan dat φ" ofwel "niet (het behoort dat φ en het behoort dat $\neg\varphi$)". D correspondeert met de eis dat de toegankelijkheidsrelatie voortzettend is, d.w.z. dat er voor elke mogelijke wereld een deontische alternatief bestaat. Door deze eis worden ook triviale systemen waarin *alles* verplicht is uitgesloten.

KD staat bekend als het *standaard deontische systeem*. Er zijn verschillende uitbreidingen van **KD** voorgesteld. Als mogelijke toevoegingen zijn onder andere $O\varphi \rightarrow OO\varphi$ (4) en $OO\varphi \rightarrow O\varphi$ (een zwakke versie van T) genoemd. (Zie ook opgave 13.) Het merendeel van de (omvangrijke!) literatuur op het gebied van modale deontische logica is echter gewijd aan de zogenaamde "deontische paradoxen" (**K**(**D**)-geldige principes met een paradoxale / tegenintuïtieve deontische lezing.)

VOORBEELD 4.2 (De paradox van A. Ross)
$\not\in O\varphi \rightarrow O(\varphi \vee \psi)$, maar "if I ought to mail a letter, then I ought to mail or burn it" klinkt tegen-intuïtief, omdat men geneigd is "I ought to mail or burn it" op te vatten als zou men vrij mogen kiezen tussen posten en verbranden van de brief.

VOORBEELD 4.3 (paradoxen van verplichting (Engels: commitment))
(i) $\not\in O\varphi \rightarrow O(\psi \rightarrow \varphi)$ en (ii) $\not\in O\neg\varphi \rightarrow O(\varphi \rightarrow \psi)$, maar als men "$O(\varphi \rightarrow \psi)$" leest als "$\varphi$ verplicht tot ψ", dan zegt (i) dat alles verplicht tot datgene wat het geval behoort te zijn en (ii) dat iets wat verboden is tot alles verplicht. (ii) maakt de formulering van zogenaamde "secundaire verplichtingen" (i.e. verplichtingen die pas in werking treden als aan een andere verplichting niet voldaan wordt) overbodig. (Zie ook voorbeeld 4.4.)

VOORBEELD 4.4 (Chisholm paradox)
Beschouw de volgende zinnen:

1.	het behoort dat φ	3.	als $\neg\varphi$, dan behoort het dat $\neg\psi$
2.	als φ, dan behoort het dat ψ	4.	$\neg\varphi$ is het geval

[Lees bijv. "men helpt zijn buren" voor φ en "men laat van te voren weten dat men komt" voor ψ.]

Intuïtief geldt dat {1,2,3,4} consistent is en geen overbodige zinnen bevat (i.e. geen enkele zin uit {1,2,3,4} volgt uit de drie overige zinnen). Elke (redelijke) vertaling van {1,2,3,4} in de taal van de deontische modale logica is echter inconsistent of bevat wél overbodige zinnen. ($\{O\varphi, O(\varphi \rightarrow \psi), \neg\varphi \rightarrow O\neg\psi, \neg\varphi\}$ is namelijk inconsistent en $\{O\varphi, \varphi \rightarrow O\psi, \neg\varphi \rightarrow O\neg\psi, \neg\varphi\}$en $\{O\varphi, O(\varphi \rightarrow \psi), O(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi), \neg\varphi\}$ bevatten een overbodige zin. Zie Opgave 14.)

Chisholm concludeert uit de paradox van voorbeeld 4.4 dat voor een logische analyse van de notie van secundaire verplichting dyadische in plaats van monadische operatoren nodig zijn:

$\varphi O\psi$:	φ verplicht tot ψ	$(O\varphi := (\varphi \rightarrow \varphi)O\varphi)$
$\varphi P\psi$:	$\neg(\varphi O\neg\psi)$	$(P\varphi := (\varphi \rightarrow \varphi)P\varphi$, ofwel $\neg O\neg\varphi)$

Er zijn verschillende semantieken voor deze dyadische operatoren bedacht. We zullen echter niet de moeite nemen deze te behandelen, want ook dyadische deontische logica lost niet alle problemen op:

VOORBEELD 4.5
Voeg aan {1,2,3,4} van VOORBEELD 4.4 toe:
5. het behoort dat $\neg\psi$.
Intuïtief volgt 5 uit 3 en 4, maar deze inferentie is niet geldig in de voorgestelde dyadische systemen.

Voor een adekwate logische analyse van deontische redeneringen is het waarschijnlijk onvermijdelijk om rekening te houden met

- de rol van de tijd (verplichtingen kunnen in de loop der tijd wijzigen door het in werking treden van secundaire verplichtingen, door het onmogelijk worden van bepaalde proposities, etc.)
- het verschil tussen een verplichte *handeling* en een verplichte *stand van zaken*.
- de ordening naar sterkte van verplichtingen die met elkaar in strijd kunnen zijn.
- (de aard van) het normatieve systeem dat ten grondslag ligt aan de verplichtingen.
etc.

Er zijn modale deontische systemen die hieraan in belangrijke mate voldoen, maar dergelijke logica's hebben de neiging zodanig onoverzichtelijk en complex te worden, dat ze ver buiten het bestek van dit diktaat vallen.

4.2 Epistemische logica

Epistemische logica is de logische studie van de begrippen kennis en geloof. (Epistemische logica wordt ook wel beperkter opgevat als de logische studie van het begrip kennis (Grieks: επιστημη), terwijl de studie van het begrip geloof (Grieks: δοξα) ook wel doxastische logica wordt genoemd.) Van oudsher zijn deze begrippen van belang voor filosofen en meer recentelijk is er ook vanuit de hoek van de informatica en kunstmatige intelligentie belangstelling voor de formele beschrijving van de eigenschappen van kennis en geloof, met name voor de formele specificatie van gedistribueerde systemen en voor de formele beschrijving van kennis in kennissystemen (kennisbanken, expertsystemen, etc).

De overheersende benadering van epistemische logica is op dit moment de door Hintikka geïnitieerde modale epistemische logica, waarin kennis van individuen of 'agenten' (Engels: agents) wordt beschreven in termen van propositionele operatoren die worden geïnterpreteerd met behulp van de mogelijke werelden semantiek:

$K_i\varphi$:	Agent i weet dat φ	(Knows)
$B_i\varphi$:	Agent i gelooft dat φ	(Believes)

(Als we slechts één agent beschouwen, dan kunnen we het subscript bij de operatoren weglaten.)

B_i en K_i zijn geen zogenaamde duale operatoren zoals bijvoorbeeld $ en Ú of O en P dat wel zijn. Dat wil zeggen: er geldt *niet* dat $B_i\varphi$ desda $\neg K_i \neg\varphi$. $\neg K_i \neg\varphi$ betekent zoiets als "agent i houdt het voor mogelijk dat φ". Men definieert echter over het algemeen geen speciale operator voor "het voor mogelijk houden". Men kan modale systemen bekijken waarin alleen K_i of alleen B_i als modale operatoren optreden, maar men kan ook systemen bekijken waarin beide (soorten van) operatoren voorkomen. Men kan dus zowel de "pure" eigenschappen van kennis (en van geloof) als de eigenschappen van kennis en geloof inclusief interactie bestuderen.

Voor de modale logica van kennis in combinatie met geloof dient men te beschikken over een taal waarin meer dan één modale operator als primitief connectief voorkomt. (Hetzelfde geldt als we de kennis of geloof van meer dan één agent beschouwen.) Dit vergt een kleine uitbreiding van het tot nu toe behandelde formalisme. Alvorens deze uitbreiding te behandelen gaan we in op de niet-gemengde logica van kennis en de niet-gemengde logica van geloof voor één agent.

4.2.1 Niet-gemengde epistemische logica

We beschouwen eerst de semantiek van K:

Zij $M = \langle W,R,I \rangle$ een (Kripke-)model en $\alpha \in W$.
Dan $V_M(K\varphi,\alpha) = 1$ desda voor alle β met $\alpha R\beta$ geldt $V_M(\varphi,\alpha) = 1$.

De formele semantiek van K is dus identiek aan die van \$ en O. In dit geval heeft de bereikbaarheidsrelatie R echter de volgende intuïtieve betekenis:

$\alpha R\beta$: in α houdt de betreffende agent op grond van zijn kennis β voor mogelijk. (β is een *epistemisch alternatief* van α (voor de betreffende agent).)

Het systeem **K** dient dus ook als basis voor epistemische modale systemen. Het ligt uitermate voor de hand om in dit kader **K** uit te breiden met T. Immers, als men iets *weet*, dan is het ook zo, want men kan alleen iets *weten* als het ook waar is. (Van iets dat *niet* waar is, kan men ten hoogste *menen* dat men het weet.). Anders gezegd, men kan in α op grond van zijn *kennis* α niet voor onmogelijk houden. Ook de axiomaschema's 4 en 5 zijn te beschouwen als plausibele principes voor tenminste sommige interpretaties van kennis:

4. $K\varphi \rightarrow KK\varphi$ "positieve introspectie"
(Als je iets weet, dan weet je dat je het weet.)
5. $\neg K\varphi \rightarrow K\neg K\varphi$"negatieve introspectie"
(Als je iets niet weet, dan weet je dat je het niet weet.)

(Bovenstaande formulering van 5 is equivalent met die van par. 3.3. Zie opgave 15.)

S5 lijkt een adekwaat systeem te zijn voor het begrip van objectieve/impliciete kennis en met name bruikbaar in het kader van gedistribueerde systemen (zie paragraaf 4.2.3). 5 (en in mindere mate ook 4) is echter zeer controversieel als men het begrip van bewuste/expliciete kennis op het oog heeft. Men is zich namelijk zeker niet bewust van alles wat men niet weet. Ook **S4** en **T** kunnen daarom als relevante systemen voor de logica van kennis beschouwd worden.

De interpretatie van de geloofsoperator B gaat geheel analoog aan die van K. $\alpha R\beta$ betekent in dat geval echter: in α houdt de betreffende agent op grond van zijn *geloof* β voor mogelijk. Hierdoor is de reflexiviteit van R niet langer plausibel (men kan immers wel degelijk onware feiten geloven), dus is T niet bevat in systemen voor geloof. Voor de axiomaschema's 4 en 5 gelden grofweg dezelfde opmerkingen als in het geval van kennis: ze zijn plausibel voor *sommige*, maar zeker niet voor *alle* opvattingen van geloof. Daarnaast is er wat te zeggen voor het toevoegen van het axioma $B\phi \rightarrow \neg B \neg \varphi$ (D), want in tenminste sommige interpretaties van geloof is het niet mogelijk dat φ en tegelijk $\neg\varphi$ geloofd wordt. (Het geloven van inconsistente formules is namelijk nog een graadje erger dan onware (contingente) feiten geloven.) Uitbreidingen van **K** die als systemen voor de logica van geloof in aanmerking komen zijn dus o.a. **KD**, **KD4**, **KD45** en **K45**.

Met name voor de begrippen van bewuste kennis en bewust geloof is het echter niet zo duidelijk of **K** wel een geschikte basislogica is: kennis en geloof volgens **K** bevat namelijk alle tautologieën en is gesloten onder geldige implicaties, want als ϕ een tautologie is, dan geldt $\%_{\mathbf{K}}\$\varphi$ en als $\%_{\mathbf{K}}\$\varphi$ en $\%_{\mathbf{K}}\varphi \rightarrow \psi$, dan geldt $\%_{\mathbf{K}}\$\psi$. Het is op dit moment een 'hot issue' om op verstandige wijze deze door **K** (en in feite dus door de mogelijke werelden semantiek) min of meer afgedwongen 'logical omniscience' te omzeilen, teneinde een minder geïdealiseerde analyse van de kennis en het geloof van logisch beperkte wezens te kunnen geven.

Een ander gebied dat in de belangstelling staat is de logische analyse van kennis in gedistribueerde systemen, waar we te maken hebben met meer dan één agent. Verschillende agenten kunnen verschillende werelden voor mogelijk houden, vandaar dat we voor elke agent i afzonderlijk een modale operator K_i en een bereikbaar-heidsrelatie R_i moeten beschouwen met

$\alpha R_i \beta \Leftrightarrow \beta$ is een epistemisch alternatief van α voor agent i en

$K_i\phi$ is waar in $\alpha \Leftrightarrow \varphi$ is waar in alle epistemische alternatieven van α voor agent i.

4.2.2 Multi-modale logica

Het alfabet van $L_{M(m)}$, de taal van (m)-modale propositielogica, wordt gedefinieerd als L_M, behalve dat \$ wordt vervangen door m verschillende modale operatoren, bijvoorbeeld $\$_1,\$_2,\ldots,\$_m$ (of $K_1,K_2,\ldots,K_m$).

DEFINITIE 4.6 FORM(m), de verzameling formules van $L_{M(m)}$, is de kleinste verzameling die voldoet aan

(i) $\{\bot\} \cup PL$, FORM(m)

(ii) als $\phi \in$ FORM(m) en $1 \leq i \leq m$, dan $\$_i\varphi \in$ FORM(m)

(iii) als $\phi,\psi \in$ FORM(m), dan $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi) \in$ FORM(m).

DEFINITIE 4.7 Een *(m)-modelstructuur* is een m+1-tupel $S = <W,R_1,R_2,...,R_m>$, waarbij $W \neq \varnothing$, en voor alle i met $1 \leq i \leq m$: R_i , $W \times W$. Een *(m)-model* is een m+2-tupel $M = <W,R_1,R_2,...,R_m,I>$, waarbij $<W,R_1,R_2,...,R_m>$ een (m)-modelstructuur is en I een (interpretatie)functie $PL \times W \to \{0,1\}$.

DEFINITIE 4.8 Zij $M = <W,R_1,R_2,...,R_m,I>$ een (m)-model. De door M bepaalde *waarderingsfunctie* V_M : FORM(m)×W → (0,1} wordt gegeven door:
- (Sem 0), (Sem ⊥), (Sem ∧), (Sem ∨) en (Sem →) van DEFINITIE 6.1.3
- (Sem $\$_i$) $V_M(\$_i\varphi,\alpha) = 1$ desda $V_M(\varphi,\beta) = 1$ voor iedere β met $\alpha R_i \beta$.

Het systeem **K(m)** wordt verkregen door aan de natuurlijk deductieregels van de propositielogica toe te voegen:
- de axiomaschema's van $\$_i$-distributie: $\$_i(\varphi \to \psi) \to (\$_i\varphi \to \$_i\psi)$ $(1 \leq i \leq m)$
- de regels voor $\$_i$-necessitatie: φ SPECIALE VOORWAARDE:

—— alle hypothesen dienen ingetrokken te

$\$_i\varphi$ zijn als de regel wordt toegepast.

STELLING 4.9 $\Gamma \,\%_{\mathbf{K(m)}}\, \varphi$ desda Γ / φ is geldig in alle (m)-modellen.

DEFINITIE 4.10 Een (m)-model $M = <W,R_1,R_2,...,R_m,I>$ en een (m)-modelstructuur $S = <W,R_1,R_2,...,R_m>$ heten *reflexief* (*symmetrisch*, etc.)desda voor alle i met $1 \leq i \leq m$ R_i reflexief (symmetrisch, etc.) is.

STELLING 4.11 Zij **KT(m)** (**KD(m)**, etc.) het systeem verkregen door voor alle operatoren $\$_i$ $(1 \leq i \leq m)$ het axiomaschema T (D, etc.) aan **K** toe te voegen. Dan gelden stellingen 3.20 en 3.21 ook als men **T** (**S4**, etc.) vervangt door **T(m)** (**S4(m)**, etc.) en 'modellen' door '(m)-modellen'.

Als geldige formules met één modale operator corresponderen met eigenschappen van de met de modale operator geassocieerde bereikbaarheidsrelatie, dan ligt het voor de hand dat formules met twee (of meer) modale operatoren kunnen corresponderen met verbanden tussen met die modale operatoren geassocieerde bereikbaarheidsrelaties. Dit blijkt inderdaad het geval te zijn (zie voorbeeld 4.12). En men kan in principe ook van deze correspondenties gebruik maken bij het formuleren en bewijzen van volledigheidstellingen à la stellingen 3.20 en 3.21.

VOORBEELD 4.12 Zij $S = <W,R_1,R_2>$ een (2)-modelstructuur (waarbij R_i met K_i geassocieerd is). Dan correspondeert het schema $K_1\varphi \rightarrow K_2\varphi$ ("agent 2 weet alles wat agent 1 weet") met het volgende verband tussen R_1 en R_2: $R_2 \subseteq R_1$ (ofwel $\forall xy\ (xR_2y \rightarrow xR_1y)$.
Zij namelijk $M = <W,R_1,R_2,I>$, R_2 , R_1 en $\alpha \in W$. Stel $V_M(K_1\varphi \rightarrow K_2\varphi,\alpha) = 0$. Dan $V_M(K_1\varphi,\alpha) = 1$ en $V_M(K_2\varphi,\alpha) = 0$. Dat wil zeggen, er is een β met $\alpha R_2\beta$ zodat $V_M(\varphi,\beta) = 0$. Maar omdat R_2 , R_1, geldt anderzijds ook $\alpha R_1\beta$ en dus, wegens $V_M(K_1\varphi,\alpha) = 1$, $V_M(\varphi,\beta) = 1$. Tegenspraak. Dus als $R_2 \subseteq R_1$, dan is $K_1\varphi \rightarrow K_2\varphi$ geldig op $S = <W,R_1,R_2>$.
Als daarentegen $\neg(R_2 \subseteq R_1)$, dan zijn er $\alpha,\beta \in W$ zodat $\alpha R_2\beta$ en niet $\alpha R_1\beta$. Definieer $M = <W,R_1,R_2,I>$ met $I(p,\gamma) = 1$ desda $\gamma \neq \beta$ en verder $I = 0$. Dan geldt $V_M(K_1p,\alpha) = 1$ en $V_M(K_2p,\alpha) = 0$ dus $V_M(K_1p \rightarrow K_2p,\alpha) = 0$. Dus als het schema $K_1\varphi \rightarrow K_2\varphi$ geldig is op $S = <W,R_1,R_2>$, dan geldt $R_2 \subseteq R_1$.

We zijn nu ook in staat tegelijkertijd de kennis en het geloof van een agent te beschouwen, namelijk in $L_{M(2)}$ met K en B als modale operatoren. Het axiomaschema $K\varphi \rightarrow B\varphi$ ("als je iets weet, dan geloof je het ook") correspondeert dan met $R_B \subseteq R_K$, waarbij R_B (R_K) de met B (K) geassocieerde toegankelijkheidsrelatie is. Merk op dat in dit geval we er niet van kunnen uitgaan dat R_B en R_K dezelfde eigenschappen hebben. (Het ligt bijvoorbeeld voor de hand dat R_K wél en R_B niet reflexief is.) Dit maakt het formuleren en bewijzen van volledigheidstellingen à la stellingen 3.20 en 3.21 iets gecompliceerder.

4.2.3 Gedistribueerde systemen en 'common knowledge'

Beschouw een gedistribueerd systeem G(m) met m processoren verbonden door een communicatie-netwerk. Ieder processor is een toestandsmachine en de toestand t_i van een processor i wordt bepaald door de begintoestand van i, de ontvangen berichten van andere processoren en eventueel bepaalde interne gebeurtenissen zoals het tikken van een klok. De globale toestand t van het systeem G(m) bestaat uit een beschrijving van de toestand van alle processoren van G(m) (Met andere woorden: $t = <t_1,t_2,...,t_m>$).

Met een gedistribueerd systeem G(m) kunnen we een (m)-modelstructuur $S_{G(m)} = <W,R_1,R_2,...,R_m>$ associëren, waarbij W de verzameling van globale toestanden van G(m) is en waarbij voor alle $t,t' \in W$ geldt dat tR_it' desda t' in de globale toestand t volgens de kennis, c.q. de toestand, van processor i mogelijk is, dat wil zeggen als $t = <t_1,t_2,...,t_m>$, $t' = <t'_1,t'_2,...,t'_m>$ en $t_i = t'_i$.

Het is eenvoudig in te zien dat $S_{G(m)}$ een reflexieve, symmetrische en transitieve modelstructuur is (ga na.). **S5(m)** is dus de aangegewezen logica voor kennis van processoren in gedistribueerde systemen. Van dit feit kan men bijvoorbeeld gebruik maken bij de formele verificatie van protocollen. Daarnaast heeft men met behulp van bovenstaande analyse van kennis in gedistribueerde systemen enkele interessante theoretische resultaten afgeleid, met name met betrekking tot het begrip 'common knowledge' (algemene kennis).

Definieer in $L_{M(m)}$ de volgende afkorting:

$E\phi := \bigwedge\{K_i\phi \mid 1 \leq i \leq m\}$ $(= K_1\phi \wedge K_2\phi \wedge .... \wedge K_m\phi)$ (<u>E</u>verybody knows ϕ)

Voeg vervolgens een 'algemene kennis'- of 'common knowledge'-operator C toe met als intuïtieve betekenis:

$C\phi := \bigwedge\{E^n\phi \mid n \geq 1\}$ $(= E\phi \wedge EE\phi \wedge EEE\phi \wedge ....)$ (ϕ is <u>C</u>ommon knowledge)

Met andere woorden, als M een (m)-model is, dan wordt de betekenis van de operatoren E en C correct wordt weergegeven door de volgende regels:

$V_M(E\phi,\alpha) = 1 \Leftrightarrow$ voor alle i met $1 \leq i \leq m$: $V_M(K_i\phi,\alpha) = 1$.

$V_M(C\phi,\alpha) = 1 \Leftrightarrow$ voor alle $n \geq 1$: $V_M(E^n\phi,\alpha) = 1$.

Men kan nu het volgende bewijzen: als er geen eisen worden opgelegd aan de bereikbaarheid van globale toestanden, dan is het niet mogelijk dat in een gedistribueerd systeem de common knowledge toeneemt, dat wil zeggen: dan is er geen ϕ en zijn er geen globale toestanden t(1),t(2),...,t(n) zodanig dat in $C\phi$ in t(1) onwaar en in t(n) waar is. (Zie opgave 18.)

Met het begrip common knowledge kan ook de volgende bekende logische puzzle (waarvan vele versies in omloop zijn) worden opgelost:

VOORBEELD 4.13 De wijze adviseurs

Er was eens een koning die op de volgende wijze de wijsheid van zijn n (≥2) adviseurs probeerde te testen: Hij blinddoekte ze, schilderde een witte stip op hun voorhoofd en verstopte de verfspullen. Vervolgens liet hij ze de blinddoeken af doen en stelde hij hen zodanig in een kring op dat ieder van hen niet zijn/haar eigen, maar wel het voorhoofd van de overige adviseurs kon zien. Toen ging hij in het midden van de kring staan en zei:

> (*) Ik heb bij ieder van jullie een witte of een zware stip op het voorhoofd geschilderd. Tenminste één van de stippen is wit. Wie de kleur van zijn stip weet, dient binnen één minuut naar voren te stappen.

Nu was het algemeen bekend onder de adviseurs dat ieder van hen perfekt logisch kon redeneren en dat ieder van hen zodanig eerzuchtig was, dat hij/zij zo snel mogelijk naar voren zou stappen om zijn kennis te etaleren (maar dat ieder van hen wel uitkeek om voortijdig een antwoord te gokken, omdat de koning ontzettend kwaad werd als een adviseur zijn/haar antwoord onvoldoende kon motiveren). Toch verstreek er een volle minuut zonder dat er een adviseur naar voren stapte. De koning bleef (*) herhalen met tussenpozen van een minuut, maar pas nadat hij in totaal n maal (*) had uitgesproken, stapten alle adviseurs naar voren en verklaarden dat hun stip wit was.

Het bovenstaande doet enigszins paradoxaal aan. Immers: (*) lijkt de adviseurs geen enkele informatie te verschaffen omtrent de kleur van hun stip (want alle adviseurs zien dat er minstens één witte stip is), terwijl bovendien het feit dat men niet direct, maar pas na n "ronden" naar voren stapte eveneens bevreemding wekt. Men kan echter inzien dat de adviseurs ongeveer als volgt geredeneerd zouden kunnen hebben:

Na de eerste keer (*): het is algemeen bekend dat er minstens één stip wit is. Ik kan daaruit echter niet concluderen wat de kleur van mijn stip is, want ik zie een witte stip bij een ander.
Na de tweede keer (*): het is nu algemeen bekend dat er minstens twee stippen wit zijn. Immers, als er slechts één adviseur met een witte stip was geweest, dan zou deze alleen zwarte stippen hebben gezien en op grond van de mededeling van de koning hebben kunnen concluderen dat zijn stip wit was en dus naar voren zijn gestapt. (En het is algemeen bekend dat ieder van de adviseurs voorgaande redenering kan maken.)
In het algemeen geldt voor $2 \leq m < n$ na de m^e keer (*): het was na m-1 keer (*) algemeen bekend dat er minstens m-1 stippen wit zijn. Er is niemand naar voren gestapt, dus is het nu algemeen bekend dat er minstens m stippen wit zijn.
Na de n^e keer (*): er zijn minstens n witte stippen. Ik zie slechts n-1 witte stippen, dus mijn stip is wit.
(Zie opgave 19.)

Literatuur

HUGHES & CRESSWELL 1968,1984 en CHELLAS 1980 zijn aan te bevelen leerboeken op het gebied van modale logica. KNEALE & KNEALE 1962 en BULL & SEGERBERG 1984 zijn interessant voor degene die meer over de historische achtergrond van modale logica wenst te weten.

A.R. ANDERSON & N.D. BELNAP 1975, *Entailment: The logic of Relevance and Necessity*, Vol. I, Princeton U.P., Princeton.

L. ÅQVIST 1984, Deontic logic, in GABBAY & GUENTHNER 1984, 605-714.

J.F.A.K. VAN BENTHEM 1983, *The logic of Time. A Modal-theoretic Investigation into the Varieties of Temporal Ontology and Temporal Discourse*, Reidel, Dordrecht.

G. BOOLOS 1979, *The Unprovability of Consistency: An Essay in Modal Logic*, Cambridge U.P., Cambridge.

R. BULL & K. SEGERBERG 1984, Basic modal logic, in GABBAY & GUENTHNER 1984, 1-88.

J.P. BURGESS 1984, Basic tense logic, in GABBAY & GUENTHNER 1984, 89-133.

B.F. CHELLAS 1980, *Modal Logic: An Introduction*, Cambridge U.P., Cambridge.

D. GABBAY & F. GUENTHNER (red.) 1984, *Handbook of Philosophical Logic*, Vol II, Reidel, Dordrecht.

J.Y. HALPERN (red.) 1986, *Theoretical Aspects of Reasoning About Knowledge. Proceedings of the 1986 Conference*, Morgan Kaufman, Los Altos Ca.

R. HILPINEN (red.) 1971, *Deontic Logic: Introductory and Systematic Readings*, Reidel, Dordrecht.

R. HILPINEN (red.) 1981, *New Studies in Deontic Logic*, Reidel, Dordrecht.

J. HINTIKKA 1962, *Knowledge and Belief: An Introduction to the Logic of the Two Notions*, Cornell U.P., Ithaca N.Y.

D. HAREL 1969, *First Order Dynamic Logic*, LNCS 68, Springer, Berlin

D. HAREL 1984, Dynamic logic, in GABBAY & GUENTHNER 1984, 496-604.

G.E. HUGHES & M.J. CRESSWELL 1968, *An Introduction to Modal Logic*, Methuen, London.

G.E. HUGHES & M.J. CRESSWELL 1984, *A Compantion to Modal Logic*, Methuen, London.

W. KNEALE & M. KNEALE 1962, *The Development of Logic*, Clarendon Press, Oxford.

S.A. KRIPKE 1959, A completeness theorem in modal logic, *Journal of Symbolic Logic* **24**, 1-14.

W. LENZEN 1978, *Recent Work in Epistemic Logic*, Acta Philosophica Fennica Vol. 30, No. 1, North-Holland, Amsterdam.

C.I. LEWIS 1912, Implication and the algebra of logic, *Mind* **21**, 522-531.

C.I. LEWIS 1918, *A Survey of Symbolic Logic*, University of California Press, Cambridge Mass.

A. PLANTINGA 1974, *The Nature of Necessity*, Oxford U.P., Oxford.

C. A. SMORYN,´SKI 1973, Applications of Kripke Models, in A.S. Troelstra (red.), *Metamathematical Investigations of Intuitionistic Arithmetic and Analysis*, Springer, Berlin, LNM 344 (1973) 324-391.

C. A. SMORYN,´SKI 1984, Modal logic and self-reference, in GABBAY & GUENTHNER 1984, 441-495.

C. A. SMORYN,´SKI 1985, *Self-reference and Modal Logic,* Springer, New York.

M.Y. VARDI (red.) 1988, *Proceedings of the Second Conference on Theoretical Aspects of Reasoning About Knowledge*, Morgan Kaufman, Los Altos Ca.

A.N. WHITEHEAD & B. RUSSELL 1910-13, *Principia Mathematica* Vols I-III, Cambridge.

Opgaven

(De opgaven die voorzien zijn van een * vergen een meer dan gemiddeld inzicht in de stof.)

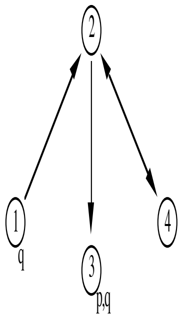
1 Gegeven is een Kripke-model M = <W,R,I>, waarbij W = {1,2,3}, R = {<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>,<2,3>,<3,3>}, I(p,1) = I(p,2) = 1 en voor de rest I = 0.
Teken een plaatje van M en bereken:
(i) $V_M(\$p,1)$ (ii) $V_M(\$p,2)$ (iii) $V_M(\$p,3)$
(iv) $V_M(\$\$p,1)$ (v) $V_M(\$\neg p,1)$ (vi) $V_M(Úp,2)$
(vii) $V_M(Ú\neg p,2)$ (viii) VM(Úp,3) (ix) $V_M(Úp \rightarrow \$p,3)$
(x) $V_M(\$p \rightarrow \$\$p,1)$ (xi) $V_M(\$\$p \rightarrow \$p,3)$ (xii) $V_M(Ú\$p,2)$
(xiii) $V_M(\$Úp,1)$ (xiv) $V_M(ÚÚp \rightarrow \$\$p,1)$ (xv) $V_M(Ú\$p \rightarrow \$Úp,3)$

2 Zij M = <W,R,I>, waarbij W = {1,2,3,4}, R = {<1,2>,<1,3>,<2,4>,<3,4>}, I(p,2) = I(p,4) = I(q,1) = I(q,3) = 1 en voor de rest I = 0.
a) Teken een plaatje van M en bereken:
(i) $V_M(Úp \rightarrow Úq,1)$ (ii) $V_M(Úp \rightarrow Úq,2)$
(iii) $V_M(Úp \wedge Úq \rightarrow \$(p \wedge q),1)$(iv) $V_M(Ú\$(p \rightarrow \$p),3)$
(v) $V_M(Úp \rightarrow q,4)$ (vi) $V_M(Úp \rightarrow q,1)$
(vii) $V_M(q \leftrightarrow (p \vee q),1)$ (viii) $V_M(\$p \leftrightarrow \$(p \vee q),1)$
b) Toon aan dat $\varphi \leftrightarrow \psi \not\subset \sigma[p:=\varphi] \leftrightarrow \sigma[p:=\psi]$ niet geldig is. (Hint: kijk naar de uitkomsten bij (vii) en (viii) hier boven.

3 Zij M = <W,R,I>, met W = {1,2,3}, R = {<1,2>,<1.3>,<2,2>,<3,3>}, I(p,2) = I(p,3) = I(q,1) = I(q,2) = 1 en voor de rest I = 0.
a) Teken een plaatje van M en bereken:
(i) $V_M(\$p \rightarrow \$\$p,1)$ (ii) $V_M(\$\$p \rightarrow \$p,3)$ (iii) $V_M(Ú\$p,2)$
(iv) $V_M(\$Úp,1)$ (v) $V_M(ÚÚp \rightarrow \$\$p,1)$ (vi) $V_M(Ú\$p \rightarrow \$Úp,3)$
b) Toon aan dat $\$\varphi \rightarrow \$\$\varphi$ geldig is in M en zelfs geldig in de modelstructuur S = <W,R>.

4a) Toon aan dat $Úp \rightarrow \$p$ en $Ú(Ú\$p \wedge \neg\$p)$ geldig zijn in het model van opg.1.
b) Toon aan dat $\$q \rightarrow q$ geldig is in het model van opg. 3.
c) Toon aan dat $\$\varphi \rightarrow \varphi$ niet geldig is in het model van opg. 3.

5 Beschouw het volgende Kripke-model M = <W,R,I>:



a) Beschrijf M (d.w.z. W, R en I) in verzamelingennotatie.

b) Definieer een een interpretatiefunctie I' zodat in M'= <W,R,I'> de formule $((p∧$p) → q) ∨ $((q∧$q) → p) ongeldig is.

6a) Geef voor elk van de volgende formules een model waarin de formule geldig is.

i) $$p → $p ii) Úp ↔ $p iii) $Ú$p → p

iv) $Úp → Ú$p v) Ú$p → $Úp vi) ÚÚp → Úp

b) Geef voor elk van de bovenstaande formules een model waarin de formule niet geldig is.

7 Bewijs de modaallogische geldigheid of ongeldigheid van de volgende formules en redeneerschema's:

i) φ → Úφ

ii) Ú**Ì**φ → φ

iii) **$Ì**(φ ∨ ψ) → (**Ì**$φ ∨ **Ì**$ψ)

iv) (Ì$φ ∨ $ψ) → $(φ ∨ ψ)

v) Ú(φ ∨ ψ) → (Úφ ∨ Úψ)

vi) $φ → (Úφ ∨ $⊥)

vii) **$Ì**(φ ∧ ψ) → (**Ì**$φ ∧ **Ì**$ψ)

viii) Úφ ∨ Úψ / Ú(φ ∨ ψ)

ix) Úφ ∧ Úψ / Ú(φ ∧ ψ)

x) $φ,Ú(φ → ψ) / $ψ

8 Ga na welke van de modellen van opgaven 1 - 4 reflexief zijn. Doe hetzelfde voor symmetrisch, transitief, voortzettend en euclidisch.

9 Onderzoek welke van de formules en redeneerschema's van opgave 7 geldig zijn in **K**, **T**, **S4** en **S5**. Geef een afleiding in het zwakste systeem (van **K**, **T**, **S4** en **S5**) waarin de formule of redenering geldig is en een tegenmodel voor het sterkste systeem (van **K**, **T**, **S4** en **S5**) waarin de formule of redenering niet geldt.

***10a)** Bewijs stelling 3.17

b) Maak het bewijs van stelling 3.18(3) af.

c) Maak het bewijs van stellingen 3.19(4) en 3.19(5) af.

***11** Zij M = <W,R,I>, met W = {1,2}, R = {<1,2>,<2,1>} en $I(p_i,1) = I(p_i,2)$. Beargumenteer dat voor alle $\varphi \in$ FORM $\$\varphi \,/\, j$ geldig is in M. Merk op dat M niet reflexief is. Is dit in tegenspraak met stelling 3.19(1)? En waarom niet?

***12a)** Bewijs stelling 3.26. (Bewijs dat voor elk paar modale systemen **S** en **S'** met een pijl van **S** naar **S'** het volgende geldt: 1. alles wat in **S'** afleidbaar is, is dat ook in **S'** en 2. er is een **S**-geldige formule φ zodat φ niet geldig is in S'.)

b) Vul het diagram van stelling 3.26 aan met **K4**, **K5**, **KD5** en **KB**.

***13** Hintikka heeft voor deontische modale logica de volgende eigenschap van de bereikbaarheidsheidsrelatie R voorgesteld: $\forall xy\,(xRy \rightarrow yRy)$, d.w.z. elke mogelijke wereld die een deontisch alternatief is van een mogelijke wereld is ook een deontisch alternatief van zichzelf. Met welk axioma correspondeert deze eigenschap van R?

14 Toon aan:
(i) $\{O\varphi, O(\varphi \rightarrow \psi), \neg\varphi \rightarrow O\neg\psi, \neg\varphi\} \,\%_{\mathbf{KD}}\, \bot$.
(ii) $\{O\varphi, \neg\varphi \rightarrow O\neg\psi, \neg\varphi\} \,\%_{\mathbf{K}}\, \varphi \rightarrow O\psi$
(iii) $\{O\varphi, O(\varphi \rightarrow \psi), \neg\varphi\} \,\%_{\mathbf{K}}\, O(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$.

15 Zij **K5'** het systeem **K** + $\neg\$\varphi \rightarrow \$\neg\$\varphi$. Bewijs voor alle $\varphi \in$ FORM:
(i) $\%_{\mathbf{K5}}\ \neg\$\varphi \rightarrow \$\neg\$\varphi$
(ii) $\%_{\mathbf{K5'}}\ \text{Ú}\varphi \rightarrow \$\text{Ú}\varphi$.

16 Parafraseer de onderstaande formules en ga na in welke systemen (uit {**K**,**T**,**S4**,**S5**}) ze geldig zijn.
(i) $K\neg\varphi \rightarrow \neg K\varphi$
(ii) $\neg K\varphi \rightarrow K\neg\varphi$
(iii) $K\bot$
(iv) $\neg K(\varphi \wedge \neg K\varphi)$
(v) $K\neg K\varphi \leftrightarrow \neg K\neg\varphi$
(vi) $K((\varphi \rightarrow K\varphi) \wedge \neg K\neg\varphi) \rightarrow K\varphi$

***17** Bewijs:
(i) $K_1\varphi \rightarrow K_2K_1\varphi$ correspondeert met $R_2R_1 \subseteq R_1$, ofwel $\forall xyz\,((xR_2y \wedge yR_1z) \rightarrow xR_1z)$.
(ii) $(K_1\varphi \wedge K_2\varphi) \rightarrow K_3\varphi$ correspondeert met $R_3 \subseteq (R_1 \cup R_2)$, ofwel $\forall xy\,(xR_3y \rightarrow (xR_1y \vee xR_2y))$.

***18** Zij $M_{G(m)} = \langle W,R_1,R_2,...,R_m,I\rangle$ een met een gedistribueerd systeem G(m) geassocieerd (m)-model. Definieer $R^{\cup} := R_1 \cup R_2 \cup ... \cup R_m$ en $R^* = \bigcup\{R^n \mid n \geq 0\}$, met $R^0 := \{\langle x,x\rangle \mid x \in W\}$ en $R^{k+1} := \{\langle x,y\rangle \mid$ er is een z zodat $xR^{\cup}z$ en $zR^k y\}$. (R^* heet de *reflexieve transitieve afsluiting* van R.)

a) Bewijs: (i) $V_{M_{G(m)}}(E\varphi,\alpha) = 1 \Leftrightarrow$ voor alle β met $\alpha R^{\cup}\beta$: $V_{M_{G(m)}}(\varphi,\beta) = 1$.

(ii) $V_{M_{G(m)}}(C\varphi,\alpha) = 1 \Leftrightarrow$ voor alle β met $\alpha R^*\beta$: $V_{M_{G(m)}}(\varphi,\beta) = 1$

b) Bewijs: als $V_{M_{G(m)}}(C\varphi,\alpha) = 1$, voor zekere $\alpha \in W$, dan geldt voor alle $\beta \in W$ $V_{M_{G(m)}}(C\phi,\beta) = 1$. (Hint: bewijs dat voor alle $\alpha,\beta \in W$ $\alpha R^*\beta$.)

***19** Beschouw voorbeeld 4.13.

a) Ga na dat zonder de (op het eerste gezicht overbodige) mededeling van de koning dat er minstens één stip wit was, het feit dat er minstens één witte stip was weliswaar bij alle adviseurs bekend was, maar onder de adviseurs niet *algemeen* bekend was.

b) Wat was er gebeurd als de koning slechts k ($1 \leq k < n$) van de n stippen wit had gemaakt en de overige stippen zwart?