Samenvatting
Hoofdstuk 7

Els Jongerius

June 6, 2007

7.1 De stelling

> **Volledigheidsstelling voor eerste orde logica (Gödel)** Eerste orde logica (ook bekend als predicaatlogica, eerste-order logica of eerste order predicaat calculus) is compleet.

Compleet betekent in deze stelling iets anders dan het *compleet* waarin de onvolledigheidsstellingen wordt gesproken. In de onvolledigheidsstellingen betekent *compleet* dat elke uitspraak in de taal van dat systeem of bewijsbaar of weerlegbaar is in het systeem. Volgens deze definitie is eerste orde logica niet *compleet.* In de volledigheidsstelling betekend *compleet* echter dat de redeneerregels van het systeem volstaan om vanuit de axioma's elke zin af te leidden die een logisch gevolg is van de axioma's.
Dat een zin A is het *logische gevolg* van de verzameling M van zinnen in die taal betekent dat voor elke interpretatie van de eerste orde taal geldt dat als elke zin in M waar is in model a, A ook waar is in model a.
Een *interpretatie* van een eerste orde taal is een structuur bestaande uit een domein van losse elementen en deelverzamelingen van dat domein en de relatie tussen elementen in dat domein overeenkomend met de predicaten in de taal.
Een interpretatie is een *model* van een eerste orde systeem T wanneer alle axioma's van T waar zijn wanneer ze gelezen worden via die interpretatie.

> **Correctheidsstelling voor eerste orde logica** Alles wat wordt bewezen met behulp van de redeneerregels van predicaat logica vanuit een verzameling axioma's is een logische gevolg van die set van axioma's.

Deze stelling geeft uitdrukking aan de andere richting van de equivalentie, de eerste richting wordt uitgedrukt in de *completeness theorem.* Deze twee stellingen samen uitdrukking aan de volgende twee aan elkaar equivalente uitspraken

> Een zin A is waar in elk model van T dan en slechts dan als A een stelling van T is.
>
> T heeft een model dan en slechts dan als T consistent is.

Het bewijs van de equivalentie van de twee uitspraken gaat als volgt:

- Een zin A is waar in elk model van T dan en slechts dan als A een stelling van T is. $\Rightarrow$ T heeft een model dan en slechts dan als T consistent is.
  - Stel "een zin A is waar in elk model van T dan en slechts dan als A een stelling van T is."
  - Neem voor A de zin "B en $\neg B$".
  - Nu geldt: als "B en $\neg B$" waar is in elk model van T, dan is "B en $\neg B$" een stelling van T.
  - "B en $\neg B$" kan niet waar zijn, omdat het een logische contradictie is.
  - Er kan dus geen model zijn waarin "B en $\neg B$" geldt, wegens de definitie van een model.
  - Als er een model van T is, bevat deze dus geen "B en $\neg B$".
  - B en $\neg B$ is waar in elk model van T is dus equivalent aan T heeft geen model.
  - T heeft geen model is dus equivalent aan $T \vdash B \wedge \neg B$
  - T heeft een model is dus equivalent aan $T \nvdash B \wedge \neg B$
  - T heeft een model dan en slechts dan als T consistent is.
- T heeft een model dan en slechts dan als T consistent is. $\Rightarrow$ Een zin A is waar in elk model van T dan en slechts dan als A een stelling van T is.
  - Stel "T heeft een model dan en slechts dan als T consistent is."
  - Bezie het model $T + \neg A$.
  - $T + \neg A$ heeft een model is dan en slechts dan als $T + \neg A$ consistent is.
  - $T + \neg A$ heeft geen model is equivalent aan $T + \neg A \vdash \perp$.
  - Voor alle modellen geldt, als het model T waar maakt, dan maakt het A waar is equivalent aan $T \vdash \neg\neg A$, ofwel $T \vdash A$
  - Een zin A is waar in elk model van T dan en slechts dan als A een stelling van T is.
- Dus geldt T heeft een model dan en slechts dan als T consistent is. $\Leftrightarrow$ Een zin A is waar in elk model van T dan en slechts dan als A een stelling van T is.
  Q.E.D.

Het is ook logisch dat deze twee zinnen equivalent zijn, omdat twee ware zinnen altijd equivalent zijn. In dit geval wordt er bedoeld dat ze simpel uit elkaar zijn af te leidden.

7.2 PA als eerste orde systeem

De taal van PA bevat:

- *functiesymbolen*, zoals $+$ en $\times$ (en S).
- Eén *constante*, 0 dat het getal nul representeert.
- Eén *predicaat*, $=$ dat een gelijkheids relatie representeert.
- Een speciaal symbool S voor de *opvolgersfunctie* (successor function). Deze functie geeft wanneer toegepast op n het getal $n+1$. Ook de notatie $\underline{n}$ wordt gebruikt, hierbij geldt dat n een elk natuurlijk getal kan zijn, en $\underline{n}$ wordt opgebouwd vanaf 0 door n-maal de functie s erop toe te passen. Zodat $\underline{0}$ is 0, $\underline{1}$ is $s(0)$, $\underline{2}$ is $s(s(0))$ enzovoort.
- Axioma's. De axioma's van PA kunnen in vier groepen worden verdeeld:
  - De axioma's voor de *opvolgersfunctie*:

    Voor alle x, het is niet zo dat $s(x) = 0$.

    Voor alle x, voor alle y, als $s(x) = s(y)$ dan $x = y$.
  - De axioma's voor de *optellingsoperatie*:

    Voor alle x, $x + 0 = x$.

    Voor alle x, voor alle y, $x + s(y) = s(x + y)$.
  - De axioma's voor de *vermenigvuldigingsoperatie*:

    Voor alle x, $x \times 0 = 0$.

    Voor alle x, voor alle y, $x \times s(y) = x \times y + x$.
  - Het axioma voor de *inductie*:

    $\forall \vec{y}\ [P(o, \vec{y}) \wedge \forall x(P(x, \vec{y}) \rightarrow P(S(x), \vec{y})) \Rightarrow \forall x\ P(x, \vec{y})$

  Deze interpretatie van PA heet het *standaardmodel*

Presburger rekenkunde is gelijk aan *PA*, maar dan met het vermenigvuldigingssymbool en de vermenigvuldigingsaxioma's weggelaten. Presburger rekenkunde kan eindig worden geaxiomatiseerd, de oneindig vele inductie axioma's kunnen worden vervangen door een eindig aantal andere axioma's zodat er een systeem ontstaat met dezelfde stellingen.
Het interessante van Presburger rekenkunde is dat het wel beslisbaar is. Hieruit blijkt dat vermenigvuldiging ervoor zorgt dat PA dit niet is.

In paragraaf 2.8 van het boek is gesteld dat er een oneindige boom van consistente varianten van PA kan worden gecreëerd, wanneer men het axioma "voor alle x, $x + 0 = x$" verwerpt en dan $0 + 0 = 0$ of de negatie toevoegd en vervolgens bij die twee varianten $1 + 0 = 1$ of de negatie toevoegd enzovoort. Het *bewijs van de consistentie* gaat als volgt:

- Stel we hebben het axioma "voor alle x, $x + 0 = x$" vervangen door een oneindig aantal axioma's.

  $$\underline{0} + 0 = \underline{n}_0, \underline{1} + 0 = \underline{n}_1, \underline{2} + 0 = \underline{n}_2, ...$$

  waarbij $\underline{n}_0, \underline{n}_1, \underline{n}_2, ...$ een b rij van getallen is.

- Het model dat bij dit systeem hoort is als volgt gedefineerd. Het domein is de verzameling van natuurlijke nummers, de constante 0 is geinterpreteerd als het getal nul, en de *opvolgersfunctie* heeft de normale interpretatie. Hierbij geldt dat het inductie axioma standhoudt ook al verandert de interpretatie van + en $\times$.

- Verander nu de interpretatie van + door $+'$ te introduceren zo gedefineerd dat

  $$k +' m = n_k + m$$

  Verander nu ook de interpretatie van $\times$ door $\times'$ te introduceren zo gedefineerd dat

  $$k \times' 0 = 0$$
  $$k \times' s(m) = k \times' m +' k$$

- Daarom zijn alle systemen in de oneindige boom van de systemen consistent, want ieder rijtje n_0, n_1, ... heeft een model.

Omdat al deze mogelijke systemen consistent zijn, stellen sommigen dat we niet over de waarheid of onwaarheid van een wiskundig uitspraak kunnen praten, maar in plaats daarvan zouden moeten praten over de waarheid of onwaarheid van een wiskundige stelling binnen het standaard model. Echter is in de meeste gevallen waarin er wordt gepraat over de waarheid of onwaarheid van een wiskundige uitspraak alleen het standaardmodel beschouwd en voegt het weinig toe.

7.3 onvolledigheid en niet-standaard modellen

> In elke consistente theorie T die een zekere complexiteit bevat zullen er uitspraken zijn die uitdrukbaar zijn in de taal van T, die waar zijn in alle modellen van T en toch niet bewijsbaar in T.

De bovenstaande formulering van de eerste onvolledigheidsstelling is *fout*, wanneer er wordt gesproken over eerste orde systemen. Wat namelijk uit de volledigheidsstelling volgt is dat een zin A in de taal van PA waar is voor elk model van PA, dan is deze ook bewijsbaar in PA.

Naast het standaardmodel van een systeem, zijn er ook *niet-standaard modellen* (nonstandard models). Een systeem heeft meerdere niet-standaard modellen en

al deze modellen zijn *isomorf*, dat betekend dat ze dezelfde wiskundige structuur hebben.
Voor PA geldt dat alle modellen die *oneindige* elementen bevatten niet-standaard modellen zijn. Een oneindig element is element a waarvoor geldt:
a is een element in de verzameling natuurlijke getallen N' dat niet de waarde van $\underline{m}$ heeft voor elk natuurlijk getal m. Met andere woorden, $\underline{n} < a$ is waar in N' voor elke n.
Dat laatste volgt uit het feit dat voor elke x en y het bewijsbaar is dat geldt of $x < y$ of $y < x$ of $x = y$, en dat ook bewijsbaar is voor elk natuurlijk getal n als $x < n$ dat $x = 0$ of $x = \underline{1}$ of ... of $x = \underline{n-1}$. Dus, als a niet de waarde heeft van een $\underline{m}$ dan moet wel gelden $\underline{n} < a$.
Een voorbeeld van een niet-standaard model van PA is het systeem PA waaraan een aritmatisering van de zin "PA is inconsistent" aan is toegevoegd. In dit model is er een element e dat voldoet aan de eis die de aritmatisering van "x is het Gödelnummergetal van het bewijs van een tegenspraak". Echter is e een oneindig element en is daarom geen echt Gödelgetal.

Men moet echter niet denken dat foute extentiële axioma's toevoegen aan een systeem de enige manier is om een niet-standaard model te krijgen. In tegenstelling juist, vaak hebben rekenkundige niet-standaard modellen dezelfde rekenkundige uitspraken als het standaard model.
Zo heeft ook *ware rekenkunde* (true arithmetic) T niet-standaard modellen. Men kan namelijk de volgende axioma's toevoegen.

> $c > 0$, $c > \underline{1}$, $c > \underline{2}$, ...
> waarbij c een nieuwe constante is.

T met elk eindig aantal nieuwe axioma's heeft echter een model. Door c een voldoende groot natuurlijk getal te laten zijn, is T consistent.
Deze manier van redeneren heet het toepassen van de *compactheidsstelling* (compactness theorem).