Samenvatting geschiedenis van de logica hoofdstuk 5

5.1 De tweede onvolledigheidsstelling.

Het bewijs van de tweede onvolledigheidsstelling.

Gödel presenteerde in 1930 op een congres zijn eerste onvolledigheidsstelling. Deze stelling had hij bewezen in een formeel systeem S dat iets sterker was dan PA. Gödel bewees het volgende: Als geldt dat S consistent is dan is er een Gödelzin G in S te construeren die onbewijsbaar is. Na het congres heeft Gödel uit deze stelling een tweede onvolledigheidsstelling afgeleid. Deze tweede onvolledigheidsstelling zegt dat een systeem niet zijn eigen consistentie kan beweren en tegelijkertijd consistent kan zijn. Hieronder volgt een afleiding van dit resultaat.
Als een formeel systeem S sterk genoeg is, kan hij de volgende stelling bewijzen:"Als S consistent is dan is G onbewijsbaar." Omdat G van zichzelf zegt dat hij onbewijsbaar is impliceert deze stelling de volgende:"Als S consistent is dan G." Als je de consistentie van S kan bewijzen, dan kan je dus G bewijzen. Maar G is nou juist net onbewijsbaar in een consistent systeem. Dus zodra S zijn consistentie bewijst, is hij inconsistent. De omgekeerde implicatie is eenvoudiger te bewijzen:"Als G dan is S consistent." Dat gaat als volgt. Een inconsistent systeem kan alles bewijzen, dus ook G. Maar het volgende geldt ook:"Als G dan is G niet bewijsbaar." Dus uit G volgt dat G niet bewijsbaar is. Dat betekent dat een systeem waarvoor een Gödelzin G bestaat consistent moet zijn.
Een uniform bewijs van de tweede onvolledigheidsstelling is zeer moeilijk om te geven. Om deze stelling te bewijzen moet je namelijk een manier vinden om de consistentie van S in S zelf uit te drukken. Laten zien dat dit mogelijk is voor een verzameling van formele systemen die aan bepaalde eisen voldoen is zeer technisch, daar gaat het boek verder niet op in.

Het bewijzen van de consistentie van formele systemen.

Alhoewel het onmogelijk is voor een formeel systeem S om zijn eigen consistentie te bewijzen, kunnen andere systemen wel de consistentie van dit systeem S bewijzen. Er wordt wel beweerd dat de consistentie van een systeem S alleen in een sterker systeem bewezen kan worden, maar dat is een problematische bewering. Als je een 'sterker' systeem definieert als een systeem dat alle axioma's van S bewijst, dan is dit in elk geval niet waar. Hieronder volgen twee voorbeelden van systemen waarvan de consistentie door een 'zwakker' systeem bewezen worden..
In PA kan je het volgende bewijzen:"Als PA consistent is, dan is PA+(Pa is inconsistent) ook consistent." Als PA zijn eigen consistentie beweert, leidt dit tot een tegenspraak. Daaruit volgt dat PA zijn eigen inconsistentie wel consistent kan beweren. PA+(Pa is inconsistent) bevat meer stellingen dan PA, dus dit is een voorbeeld van een zwakkere theorie die de consistentie van een sterkere theorie kan laten zien.
Je kan ook in het systeem PA+(ZFC is consistent) interpretaties van alle stellingen van ZFC bewijzen. Als je een stelling A in ZFC hebt, is er een interpretatie van deze stelling te vinden in het systeem PA+(ZFC is consistent). Alle stellingen die in ZFC bewijsbaar zijn, zijn dan ook in PA+(ZFC is consistent) bewijsbaar. Goldbachachtige stellingen hoeven zelfs niet geinterpreteerd te worden, die zijn direct bewijsbaar in PA+(ZFC is consistent)

Consequenties van de tweede onvolledigheidsstelling.

De tweede onvolledigheidsstelling heeft veel implicaties. Hier volgen er drie.
Een theorie kan niet consistent zijn terwijl hij zijn eigen consistentie beweert. Dit is een tegenintuitieve uitspraak, want je zou denken dat er geen tegenspraak is als een consistent systeem zijn eigen consistentie beweert. We weten nu allemaal hoe deze tegenspraak te construeren is (zie het begin van deze samenvatting)
Löb heeft laten zien dat als je deze stelling kan bewijzen in PA:"Als je een bewijs van A kan geven dan A." daaruit volgt dat PA bewijst A. Dit klinkt als een heel gek resultaat. Immer, als je anneemt dat er een bewijs voor A is en daaruit A kan afleiden, dan A. Het bewijs voor deze stelling is echter niet moeilijk te geven. Ik zal het bewijs hieronder schematisch opschrijven.(De redenering is in PA.)

- 1)Als A bewijsbaar is dan A.
- 2)Als niet A dan is A niet bewijsbaar.
- 3)Als A niet bewijsbaar is dan is PA consistent.
- 4)Als niet A dan is PA+(niet A) consistent.(volgt uit 2 en 3.)
- 5)Wegens Gödels tweede onvolledigheidsstelling kan een theorie zijn eigen consistentie niet

consistent postuleren, dus falsum.

- 6)Als niet A dan falsum, dus niet-niet A, dus A.
Een laatste implicatie is vrij subtiel. Theoriën als ZFC en PA kunnen namelijk de consistentie van alle eindige subsets van hun eigen axioma's bewijzen. Waarom kunnen ze dan niet bewijzen dat ze consistent zijn? Nuance: ze kunnen niet bewijzen dat al hun subsets consistent zijn, ze kunnen alleen, gegeven een willekeurige subset axioma's, laten zien dat deze consistent is. Zulke subtiliteiten laten zien hoe rijk de implicaties van Gödels tweede onvolledigheidsstelling zijn.

5.2 **Skeptische conclusies uit Gödels tweede onvolledigheidsstelling.**

Sommige mensen beweren dat we niets definitief kunnen bewijzen in wiskunde of dat we niet kunnen laten zien dat theoriën consistent zijn. Dit is allemaal gebaseerd op het idee dat de consistentie van een systeem twijfelachtig is, of dat de consistentie van een systeem op een andere manier bewezen wordt dan een conventionele bewijs.

Sceptici maken een verkeerd onderscheid: in hoeverre ZFC betrouwbaar is is ongerelateerd aan of ZFC zijn consistentie kan bewijzen. Als je sceptisch bent tegenover de betrouwbaarheid van een theorie dan heeft een bewijs van zijn eigen consistentie ook geen nut. Een bewijs vanuit betwijfelbare axioma's is ook betwijfelbaar.

Een tweede overweging is dat dit verhaal slechts geldt als je alleen redeneren van een finitistische natuur accepteert, zoals Hilbert deed. Sommige mensen denken dat alleen het finitistisch redeneren logisch gezien 'veilig' is, dat het tot consistente resultaten leidt. Als je alleen finitistisch redeneren accepteert, zijn de axioma's van PA ook niet controversieel. Dan zal Gödel's stelling er niet voor zorgen dat je PA als inconsistent ziet. Als je non-finitistisch redeneren accepteert kan je de consistentie van PA wel bewijzen.

5.3. Bewijzen van consistentie uitspraken

Er kunnen twijfels bestaan over de consistentie van een theorie. Men kan deze twijfels proberen weg te nemen door een consistentie bewijs te geven.

Het belang van absolute en "relatieve" consistentie bewijzen is vaak technisch en bewijst meer dan louter consistentie. Zo toont Gödels bewijs van de "relatieve" consistentie van het keuze axioma in de verzamelingenleer dat elke rekenkundige stelling die bewijsbaar is middels dat axioma, ook kan worden bewezen zonder dat axioma.

Het consistentie bewijs voor ZFC wordt niet gedaan met normale wiskunde en bewijst de consistentie van ZFC niet op dezelfde wijze als Fermat's Laatste Stelling is bewezen. Er zijn voor ZFC bewijsvoeringen die of axioma's van oneindigheid (een begrip uit de verzamelingstheorie) gebruiken of die bv. bewijsvoeringen middels reflectie zijn.

De consistentie van PA en theorieën in de reeks PA, PA_1, PA_2, …. (waarbij PA_1 wordt verkregen door het axioma "PA is consistent" toe te voegen aan PA, PA_2 voegt het axioma "PA_1 is consistent" aan PA_1 toe etc.) is bewijsbaar m.b.v. normale wiskunde. Voor deze bewijsvoering dient bewezen te worden dat PA rekenkundig correct ("sound") is, d.w.z. dat elke rekenkundige stelling van PA waar is en dat de inferentie regels van PA leiden van ware premissen tot ware conclusies. ACA, een zwakke verzamelingstheorie die een fragment van ZFC is, doet dit alles en geeft derhalve een wiskundig bewijs dat PA consistent is.

Critici werpen tegen dat de consistentie van ACA betwijfeld kan worden (waarmee men juist de consistentie van PA wil bewijzen) aangezien ACA een logisch sterker systeem is dan PA. In dat geval, en in het algemeen gesproken, is het beter een consistentie bewijs uit te voeren in een theorie waarvan de consistentie niet betwijfeld wordt. Een consistentie bewijs kan, net als bewijsvoeringen van rekenkundige stellingen in het algemeen, een doodnormale wiskundige bewijsvoering zijn van een bepaald feit over een formeel systeem die er niet op is gericht twijfels weg te nemen over de consistentie van de wiskunde. Gödel's stelling doet geen uitspraak over het idee dat een consistentie bewijsvoering niet een bewijs is op dezelfde manier als elk ander wiskundig bewijs. Het zegt ons niet wat betwijfeld dient te worden in de wiskunde. Het heeft alleen zin om te zeggen dat de consistentie van de rekenkunde niet bewijsbaar is als men skeptisch staat tegenover de normale wiskunde in het algemeen.

5.4. Onuitputtelijkheid ("inexhaustability")

Stel dat men niet sceptisch is ingesteld t.o.v. de wiskunde. Volgens Gödel zijn de consequenties van de tweede onvolledigheidsstelling dan dat het onmogelijk is te stellen dat a) de axioma's en regels van een systeem met mathematische zekerheid correct zijn EN b) dat ze alle wiskunde bevatten. Er zou dan namelijk een tegenspraak ontstaan want de volgende gevolgtrekking kan dan worden gedaan: als a) wordt verondersteld dan dient met dezelfde zekerheid te worden verondersteld dat de axioma's en regels consistent zijn.

De tweede onvolledigheidsstelling heeft een positieve consequentie juist vanwege deze gevolgtrekking. Elk correct ("sound") formeel systeem (dus met axioma's die ware uitspraken zijn) kan dan namelijk worden uitgebreid tot een sterker systeem dat ook correct is door als nieuw axioma toe te voegen dat het originele systeem consistent is (als een systeem T correct is dan is T eveneens ook consistent en derhalve is T+Con(T) ook correct). Zo kan dan een oneindige reeks extensies van een begintheorie T (bv. PA) worden geconstrueerd. Indien T correct is dan zijn alle theorieën in de reeks correct. Volgens Gödel geldt dat we dergelijke reeksen ook kunnen construeren door als axioma telkens een sterkere uitspraak dan "T is consistent" (bv. "T is sigma-correct") toe te voegen mits zo'n uitspraak nog steeds volgt uit de rekenkundige correctheid van T. Soortgelijke, maar sterkere uitbreidingsprincipes, zgn. reflectie principes kunnen ook worden opgesteld.

Bovendien geldt dat als we een theorie PA_ω vormen waarvan de axioma's de axioma's van PA zijn plus alle consistentie uitspraken die bij het maken van een dergelijke reeks (met als uitbreiding telkens de uitspraak dat de voorgaande theorie consistent is) tot aan PA_ω zijn verkregen, dan is PA_ω ook correct. Indien deze reeks wordt voortgezet dan rijst de vraag wanneer precies we kunnen bewijzen dat een bepaalde theorie uit deze reeks correct is. De beantwoording van deze vraag is zeer technisch en valt buiten de scope van deze paragraaf. Dergelijke reeksen hangen samen met een deel van de wiskunde dat thans sterk in ontwikkeling is en waar transfiniete getallen een belangrijke rol spelen.