Hoofdstuk 4. Incompleteness everywhere

4.1. De onvolledigheidsstelling buiten de wiskunde

Omdat de begrippen van de onvolledigheidsstelling ook een alledaagse betekenis hebben, wekt het geen verbazing dat men gedacht heeft dat de stelling ook toepassing vindt buiten de wiskunde, zoals ten aanzien van de Bijbel, de Amerikaanse Grondwet of Ayn Rands filosofie. Maar deze toepassingen zijn incorrect. De onvolledigheidsstelling is een wiskundige stelling over formele systemen met een zekere hoeveelheid rekenkunde. De Bijbel e.d. genereren geen rekenkundige stellingen en zijn geen formele systemen.
We kunnen weliswaar bij wijze van analogie of beeldspraak bijvoorbeeld nagaan of de Bijbel de vraag of Mozes nieste op z'n 5de verjaardag beantwoordt. Vaak luidt dan de conclusie dat het systeem "onvolledig" is. We hebben echter Gödel niet nodig om vast te stellen dat de Bijbel en in feite elke niet-formele theorie in deze betekenis onvolledig is. Het is heel natuurlijk om van alles op te vatten als een systeem met axioma's en stellingen, bijvoorbeeld een juridisch systeem. Maar een dergelijke beeldspraak rechtvaardigt niet de conclusies van een echt logisch systeem. Zo is het juridische systeem niet alleen "onvolledig of inconsistent" maar zowel onvolledig als inconsistent, hetgeen daar geen probleem vormt (het vormt in feite de grondslag voor de rechtspraak).

4.2. Het "menselijk denken" en de onvolledigheidsstelling

Ook het "menselijk denken" of het "menselijk brein" is geen formeel systeem. Toch wordt het wel aantrekkelijk gevonden om de onvolledigheidsstelling op dat menselijk denken te betrekken en wel voor zover dat denken logisch zou zijn. Als daarmee is bedoeld dat men conclusies bereikt die ook een formeel logisch systeem zou bereiken, dan zegt dat nog niets over hoe men de conclusies feitelijk trekt. En formele systemen hebben helemaal geen relevantie voor onze typische intellectuele activiteiten zoals politiek debatteren e.d., nu deze niet getalsmatig zijn. Alleen als we streven naar een strikt hersenloos rekenen is er een gerechtvaardigde associatie met een formeel systeem maar dan nog slechts als metafoor.

Op grond van bovenstaande hoort men vaak de volgende - controversiële - redenering.
De onvolledigheidsstelling gaat slechts over het bewijzen van wiskundige beweringen.
Nu de menselijke geest ook wiskundige beweringen bewijst en daarbij niet onderhevig is aan Gödels stelling, overstijgt deze geest computers en formele systemen.
Aan de discussie over de vraag of de menselijke geest beperkt wordt door de onvolledigheidsstelling ligt de assumptie ten grondslag dat we zinvol kunnen spreken over "wat de menselijke geest kan bewijzen" in de rekenkunde. Indien zo'n verzameling M van de door de mens bewijsbare rekenkundige zinnen opsombaar is, dan volgt uit Gödels stelling dat er menselijk onbeslisbare zinnen zijn, en anders hoeft dat niet het geval te zijn.
Maar er is nauwelijks reden om aan te nemen dat de assumptie dat M bestaat gerechtvaardigd is. Gelet op de flexibiliteit van de menselijke geest is het onwaarschijnlijk dat een theorie over de menselijke geest denkbaar is die het mogelijk maakt om zinvol te spreken over welke wiskundige stellingen de geest theoretisch gezien

allemaal zou kunnen bewijzen. Daarbij komt dat men het al niet eens kan worden - zie bijvoorbeeld het debat tussen het intuïtionisme en de klassieke logica - over wat een bewijs is en dat men niet kan voorspellen welke beginselen in de toekomst als gerechtvaardigd of evident zullen worden opvat. En zodra men bewijzen gaat definiëren wordt de menselijke geest irrelevant en verplaatst de discussie zich naar die over formele systemen. Er is gewoon geen manier om in absolute termen te spreken over "wat de menselijke geest kan bewijzen".

4.3. Gegeneraliseerde Gödelzinnen

Wiskundig

Gödels constructie van bewijsbare dekpunten wordt veel gebruikt in de logica. Een voorbeeld is het gebruik ervan in een formeel systeem in een bredere betekenis van het woord, waarbij de Basiseigenschap dat de stellingen opsombaar zijn niet geldt en die niet in de wiskunde maar wel in de logica wordt bestudeerd. Zo'n systeem T kan bijvoorbeeld worden verkregen door *elke* ware bewering van de vorm "De Diofantische vergelijking $D(x_1,\ldots,x_n)=0$ heeft geen oplossing" als axioma aan PA toe te voegen. Omdat de verzameling van Gödelgetallen van die beweringen kan worden gedefinieerd in de taal van de rekenkunde (en dat is niet trviaal!), kunnen we met behulp van de dekpuntconstructie een rekenkundige bewering A formuleren waarvoor het in PA bewijsbaar is dat A waar is d.e.s.d.a. A niet bewijsbaar is in T. Het is niet mogelijk dat A onwaar is, want dan impliceert de dekpuntconstructie dat de onware A bewijsbaar is in T terwijl T alleen maar ware axioma's en stellingen bevat. A is dus waar, maar onbewijsbaar in T. Dit laat zien dat veel theorieën die geen formele systemen constitueren toch onvolledig zijn. Maar dit is niet altijd het geval. De theorie T die we verkrijgen door alle ware rekenkundige zinnen als axioma's aan PA toe te voegen is immers duidelijk volledig. De constructie van de Gödelzin faalt hier omdat de eigenschap het Gödelgetal van een ware rekenkundige zin te zijn niet in de taal van de rekenkunde kan worden gedefinieerd.

Niet wiskundig

Wat is er mis met het imiteren van de Gödelzin voor niet-wiskundige systemen zoals "De waarheid van deze zin kan niet worden vastgesteld op basis van de Bijbel"?
Een gangbare verwerping van een dergelijke zelfreferentie is dat de verwijzing naar zichzelf een oneindige regressie veroorzaakt. Dat is hier echter niet aan de orde, omdat "deze zin" – net als bij de oorspronkelijke Gödelzin – niet naar de propositie zelf maar naar de zin als een syntactisch object verwijst. De imitatie van de Gödelzin lijkt dan gewoon waar te zijn en daarbij ook voor de Bijbelstudie niet problematisch omdat elke relevantie van de zin voor die studie ontbreekt, hetgeen anders is bij de echte Gödelzin nu deze een rekenkundige zin is die blijkt niet te kunnen worden bewezen door de rekenkundige theorie PA. Wel kunnen dergelijke Gödelzin-achtige constructies problematisch zijn doordat zij tot paradoxen leiden, zoals "Van deze zin kan niet worden aangetoond dat deze waar is door middel van correct redeneren", "John zal zichzelf nooit

overtuigen van de waarheid van deze zin" (als John de zin zelf uitspreekt) en de beroemde leugenaarsparadox "Deze zin is onwaar".
Deze niet-wiskundige Gödelzinnen en paradoxen zijn echter geen toepassingen van (het bewijs van) de onvolledigheidsstelling: zij wekken slechts verwarring doordat hun termen zoals 'waar', 'bewijsbaar' e.d. niet (wiskundig) gedefinieerd zijn, terwijl die termen bij de onvolledigheidsstelling als wiskundige stelling juist wel wiskundig definieerbaar zijn.

4.4. Onvolledigheid en de TOE

Natuurkundige prominenten als Dyson en Hawking hebben de onvolledigheidsstelling als argument gebruikt voor hun visie dat ook de natuurkunde onuitputtelijk is en de Theory of Everything aldus een onbereikbaar ideaal. Maar zelfs als de theoretische fysica kan worden geformaliseerd, dan nog heeft de onvolledigheidsstelling slechts betrekking op de rekenkundige en niet de fysische component van zo'n theorie. En dat een wetenschappelijke theorie niet alles, waaronder schoonheid en liefde, kan omvatten heeft niets met Gödels stelling te maken.
Hawking ziet een overeenkomst tussen Gödels bewijs en de zelfreferentie van fysische theorieën over het universum omdat die theorieën zelf deel uitmaken van het universum, maar deze relatie is opnieuw hooguit metaforisch. Hij verwijst ook naar een relatie tussen rekenkunde en het voorspellen van de uitkomsten van fysische experimenten. Maar het niet kunnen bewijzen van een rekenkundige waarheid impliceert weliswaar dat we geen voorspelling in een corresponderend fysisch experiment kunnen doen, maar dat betekent nog geen onvolledigheid in onze beschrijving van de fysische wereld. Onze voorspellingen zijn gebaseerd op de premisse dat rekenkunde een goed model is voor het gedrag van fysische systemen met betrekking tot bepaalde, waarneembare of meetbare eigenschappen (zoals het niet spontaan ontstaan van nieuwe objecten).

4.5. Theologische toepassingen

Gödel geloofde in de mogelijkheid van rationele theologie en heeft, weliswaar als zuiver logisch onderzoek, een eigen versie van het ontologische godsbewijs van Anselmus geconstrueerd. Anderen hebben echter ook gemeend theologische conclusies uit de onvolledigheidsstelling te kunnen trekken. Sommige zijn obscuur, andere zijn begrijpelijk. Graves heeft gelijk dat geen enkel consistent systeem z'n eigen consistentie kan bewijzen of elke vraag die het opwekt kan beantwoorden. Elk logisch systeem heeft daartoe een ander logisch systeem nodig. Maar zijn christelijke analogie dat het (eindige) universum om zichzelf te kunnen verklaren (de oneindige) God als het hogere nodig heeft, is slechts een analogie. Bovendien is het onwaarschijnlijk dat wanneer PA z'n eigen consistentie zou kunnen bewijzen, een theoloog hieruit zou concluderen dat dan ook het universum geen God nodig heeft. Ook is het geen implicatie van de onvolledigheidsstelling dat ook wetenschappers moeten vertrouwen op geloof, nu er onbewijsbare waarheden bestaan: de axioma's en andere basisbeginselen moet men immers evengoed zonder bewijs accepteren.
Dan is er nog het aan "de postmoderne conditie" verwante standpunt dat logische onvolledigheid tot een wildgroei aan consistente maar tegenstrijdige systemen leidt en dat

alleen religieus geloof in plaats van de rede ons kan leiden. Maar zoals we al eerder opmerkten is er helemaal geen wildgroei of verwarring in de wiskunde.
Er resten ons nog twee aan het theologische standpunt verwante kwesties: de sceptische conclusies die uit de tweede onvolledigheidsstelling zouden volgen en de conclusies over de aard van de menselijke geest die uit de eerste onvolledigheidsstelling zouden volgen. Deze kwesties zullen in hoofdstuk 5 respectievelijk hoofdstuk 6 worden behandeld.