HOOFDSTUK 2 paragraaf 6

De tweede onvolledigheidsstelling (Gödel):

> ***Voor ieder consistent formeel systeem S, waarin een zekere hoeveelheid elementaire rekenkunde kan worden uitgevoerd, is het niet mogelijk om de consistentie van S in S zelf te bewijzen.***

Merk hierbij op dat;
Ten eerste, de stelling veronderstelt dat het statement 'S is consistent' kan worden uitgedrukt in de taal van S. Als dat niet zo is, dan is stellen dat de consistentie van S niet in S kan worden bewezen irrelevant.
Ten tweede is het van belang dat de zinsnede 'een zekere hoeveelheid rekenkunde' in de tweede onvolledigheidsstelling duidt op een andere hoeveelheid rekenkunde dan in de eerste onvolledigheidsstelling. Voor de eerste onvolledigheidsstelling is het nodig dat het systeem alle rekenkundige uitspraken moet kunnen bewijzen die middels een mechanische berekening opgesteld kunnen worden. Voor de tweede onvolledigheidsstelling is het nodig dat in het systeem *Gödel codering* kan worden toegepast.

Gödel codering is een methode om syntactische objecten (zoals zinnen en bewijzen) om te zetten in getallen. Het is van belang dat syntactische operaties uitdrukbaar zijn in de rekenkunde. Hoe dat gebeurd, wordt in het boek niet op in gegaan, er wordt alleen gesteld dat het kan en mag. Het gevolg is dat er stellingen zijn in het rekenkundige gedeelte van een systeem S, die we kunnen interpreteren als zinnen en bewijzen in formele systemen, waaronder systeem S zelf. De rekenkundige zinnen op zich zelf hebben geen betekenis, net zoals een hele rij van enen en nullen in de binaire taal niet een echte betekenis hebben. Belangrijk is hetgeen waarnaar verwezen wordt, zoals de plaatjes die de nullen en enen uitdrukken.

$\mathbf{Cons}_S$ is een rekenkundige vertaling, via Gödel codering, van de zin 'S is consistent'. Omdat een Gödel getal de eigenschap heeft dat hij syntactische operaties uit kan drukken in de rekenkunde, kan 'S is consistent' worden geformuleerd als een Goldbachachtige stelling. De tweede onvolledigheidsstelling stelt dat als $Cons_S$ waar is, dit niet in S kan worden bewezen. $Cons_S$ kan wel in een ander systeem worden bewezen. Een veel voorkomend misverstand is dat dit alleen kan in systemen sterker dan S. Waarbij onder sterker dan wordt verstaan dat het systeem alles bewijst wat S bewijst en meer.
Een kanttekening die bij deze redenering wordt gezet is dat wanneer de consistentie van S is bewezen is S', dan ook de consistentie van S' moet worden bewezen in S" om zo oneindig door te gaan. Dit is echter te weerleggen, omdat axioma's niet gerechtvaardigd worden door een ander systeem, maar door hun eigen intuïtieve, heldere en overtuigende karakter, door hun bruikbaarheid en succes in de praktijk, door traditie en wat verder nog te sprake komt.

HOOFDSTUK 2 paragraaf 7

Een veel voorkomend misverstand over Gödels eerste onvolledigheidsstelling is dat er uit af te leidden is dat voor een zeker rekenkundige statement, G (de Gödelzin), dat zich baseert op het feit dat S onbewijsbaar is in S en indien S ook consistent is, geldt dat G waar is. Echter is alleen te stellen dat als S consistent is, G waar is. De waarheid van G kan dus niet worden bepaald aan de hand van de eerste onvolledigheidsstelling. De stelling is dus niet meer of minder dan een gewoon wiskundig bewijs.

Gödel introduceert voor zijn bewijs van de eerste onvolledigheidsstelling een techniek waarmee hij bewijsbare **dekpunten** voor verschillende eigenschappen van rekenkundige zinnen definieert. Hierbij wordt er weer vanuit gegaan dat syntactische operatie uitdrukbaar zijn in de rekenkunde.
Stel nu dat P in Gödel codering wordt gedefinieerd, waardoor P berekenbaar wordt. Een bewijsbaar fixatiepunt van P is de rekenkundige zin A. A is dan en slechts dan bewijsbaar in S of een zwakker systeem van S, wanneer m de eigenschap P heeft. Waarbij m het Gödel getal van A is.
Gödel stelt het bestaan van het bestaan van fixatiepunten vast door de stelling die 'zegt van zichzelf dat het eigenschap P heeft' te vertalen in rekenkunde. Dit deed hij middels de constructie die we in de natuurlijke taal zouden formuleren als:

Het resultaat van de subsituering van het aanhaling "Het resultaat van de subsituering van het aanhaling x voor 'x' in x, heeft eigenschap P" voor 'x' in "Het resultaat van de subsituering van het aanhaling x voor 'x' in x, heeft eigenschap P", heeft eigenschap P.

Hiermee zegt hij dat er een zin is die aan een zekere beschrijving voldoet, de eigenschap P heeft en dat de zin zelf de enige zin is die aan die beschrijving voldoet.

Een andere methode hiervoor werd geformuleerd door W.V.O Quine. Deze methode wordt **Quining** genoemd.

"levert een zin op met de eigenschap P wanneer je het achter zijn eigen aanhaling zet" levert een zin op met de eigenschap P wanneer je het achter zijn eigen aanhaling zet

Een zin G verkregen door een constructie van een normaal fixatiepunt zodat S bewijst G dan en slechts dan wanneer *n* niet het Gödel getal van een stelling uit S is en *n* het Gödel getal van G is, heet een **Gödelzin**

Met deze noties is het volgende **bewijs van de eerste onvolledigheidsstelling** te construeren.
Ten eerste moet er worden opgemerkt dat G als een Goldbachachtige stelling kan worden geformuleerd. Hieruit volgt dat er geen getal *p* het Gödel getal van een bewijs van G in S is en dat het zijn van dat getal *p* berekenbaar is, m.a.w. G is equivalent aan niet bewijsbaar G. (**G ←→ Bew ('G')**)
Nu gaat de redenering als volgt. Als G een stelling is in S, dan is het bewijsbaar in S dat G een stelling is in S en daarmee dat het Gödel getal is van een stelling in S. De reden hiervoor is dat het zijn van een stelling in S een eigenschap is die kan worden geverifieerd door een aan te wijzen bewijs in S. Omdat het zijn van een bewijs in S vereist dat de stelling berekenbaar is, kan deze verificatie in S. Dus wanneer G een stelling in S is, is deze bewijsbaar in S. (□ **G →** □ **Bew ('G')**)
Echter omdat G een bewijsbaar fixatiepunt is van de eigenschap *niet* een stelling in S te zijn, is de negatie van G ook bewijsbaar in S. (□ **G →** □ **¬ Bew ('G')**)
Dus dan is S inconsistent. (wegens modus ponens volgt uit□ **¬ Bew ('G')** en□ **Bew ('G')**, □ □)
Dus wanneer S consistent is, is G niet bewijsbaar in S. (□ **/**□ **→**□ **/ G**[1], volgt uit□ **G →**□ □. Dus wanneer **ConP →**□ **/ G**)
Omdat G een Goldbachachtige stelling is en waar is en omdat S consistent is, volgt het dat niet-G niet bewijsbaar is in S, aangenomen dat S sigma -sound is.

Tarski's stelling geeft uitdrukking aan het feit dat er in de rekenkundige taal geen manier is om de eigenschap "het zijn van een Gödel getal van een *ware* rekenkundige zin" uit te drukken. Wanneer men dit zou kunnen zou ook het fixatiepunt van de eigenschap "het *niet* zijn van het Gödel getal van een ware rekenkundige zin" uit te drukken zijn. Dit zou leidden tot de constructie van een rekenkundige zin A die alleen waar is, wanneer deze niet waar is. Net als in de *leugenaarsparadox*.
Gödel zelf zegt dat deze contradictie niet optreed wanneer er in plaats van over een *ware* rekenkundige zin wordt gesproken, over een zin wordt gesproken die *bewijsbaar is in S*.

Niet alle bewijzen van de eerste onvolledigheidsstelling maken gebruik van zelfreferentie. Neem het **bewijs van Matiyasevich-Robinson-Davis-Putnam,** deze maakt gebruik van berekenbaarheid. Dit argument gaat als volgt. Er is geen algoritme dat gegeven een Diophantine vergelijking *D(x1, . . , xn)=0* zal beslissen of de vergelijking een oplossing heeft of niet. Daarom kan er ook geen theorie zijn dat voor iedere stelling van de vorm 'de Diophantine vergelijking *D(x1, . ., xn)=0* heeft tenminste een oplossing.' of de negatie hiervan, beslist of deze waar is of niet. Wanneer er zo'n theorie S zou zijn, kon men beslissen of bij een gegeven vergelijking *D(x1, . . ,xn)=0* een oplossing heeft, door schematisch in S te zoeken. Dus tenzij S een valse zin van de vorm 'de Diophantine vergelijking *D(x1, . ., xn)=0* heeft tenminste een oplossing.' bewijst, moeten er zinnen van deze vorm zijn die onbeslisbaar zijn in S. Meer hierover in hoofdstuk 3

[1] Lees ├/ als niet bewijsbaar in metataal.

Voor het **bewijs van het tweede onvolledigheidsstelling**, is de eerste vereist. De eerste onvolledigheidsstelling bewijst dat als systeem P[2] consistent is, G niet bewijsbaar is in P en daarom waar is. Omdat het argument slechts gebruik maakt van wiskundig redeneren van een vorm die kan worden uitgevoerd in P, volgt de implicatie dat 'als P consistent is dan G' bewijsbaar is in P. Dat betekend dat als P consistent is er dan volgt dat 'P is consistent' niet bewijsbaar is in P, omdat G niet bewijsbaar is in P. G is binnen P gelijk aan 'G is niet een stelling van P'. Dus G en 'P is consistent' zijn gelijk aan elkaar in P. Daaruit volgt dat 'P is consistent' niet te bewijzen is in P.

HOOFDTUK 2 paragraaf 8

Een misvatting over Gödels onvolledigheidsstellingen is dat men denkt dat een onbeslisbare stelling zorgt voor vertakkingen van de wiskunde, in één tak is de onbeslisbare tak wel te bewijzen en in de andere niet. Echter wanneer er in Gödels onvolledigheidsstellingen over bewijsbaarheid of onbeslisbaarheid wordt gesproken, gaat het altijd over bewijsbaarheid of onbeslisbaarheid binnen een bepaald systeem. Dit wordt vaak vergeleken met de Euclidische meetkunde en daarom wordt Gödel vaak ook gezien als maker van de postmoderne conditie. Alleen is niet ieder onbeslisbaar geval te zien als opsplitsbaar.

> Bijvoorbeeld PA heeft een axioma dat stelt dat voor iedere *n* geldt dat $n+0 = n$. Dit is niet te bewijzen uit de andere axioma's dus het is een consistente theorie als je het axioma verandert in '*het is niet zo dat voor iedere n geldt dat* $n+0 = n$'. Dit heeft volgens Gödels stelling een wiskundige structuur waarin er objecten *e* zijn, waarbij $e+0$ niet gelijk is aan *e*, maar verder wel aan de axioma's van PA voldoen. Deze structuur is niet wiskundig of gebruiksmatig van belang en het beïnvloedt zeker niet de waarheid van de observatie dat $n+0 =n$ geldt voor ieder *n*.

Wanneer nu de consistentie van PA wordt bewezen in T en vervolgens weer de consistentie van T wordt bewezen, volgt er een boom die zich steeds splitst in 'PA is consistent' en 'PA is niet consistent' en hetzelfde met T en dat steeds opnieuw. Dit levert echter geen interessante boom op, want het is bekend dat PA en T consistent zijn en is een dus maar een tak die interessant is. Het is dus niet zo dat Gödels theorieën tot interessante, oneindige bomen leiden.

HOOFDTUK 2 paragraaf 9

Een ander misverstand als gevolg van Gödels stellingen is dat het menselijk brein beter zou zijn dan de computer. Dat misverstand gaat als volgt: 'Gödels stelling zegt dat in elk consistent systeem dat sterk genoeg is om simpele rekenkunde uit te voeren, er formules zijn die niet in het systeem te bewijzen zijn, maar waarvan wij zien dat ze waar zijn'. Maar, meestal weten we van een systeem niet of het consistent is, dus dan weten we ook niet of een Gödel zin waar is. Als het menselijk brein de consistentie zou kunnen bepalen van een formeel systeem, zou het menselijk brein inderdaad beter zijn, maar dat is nog niet bewezen. Ook de zwakkere bewering dat 'geen machine een adequaat model is voor de geest' volgt niet uit de onvolledigheidsstelling.
Stel er bestaat een formeel systeem S dat de menselijke rekenkundige vaardigheid uitdrukt. Alleen hoe weet je dat S consistent is. Op zijn best is S net zo consistent als wij. Als echter bekend zou zijn dat S consistent is, dan zou er een hele opvallende consequentie uit Gödels stellingen zijn af te leiden, namelijk dat de menselijke kennis onuitputtelijk en dus niet in termen van mechanismen en berekeningen weer te geven. Want voor ieder consistent system S waarvan we weten dat het consistent is, kunnen we altijd nog een andere statement toevoegen die nog niet in S zit, namelijk de consistentie van S. Meer hierover komt in hoofdstuk 6.

---

[2] De reden dat hier wordt gesproken over systeem P, is omdat de eerste versie van het bewijs over het systeem P ging. Systeem P moest voldoen aan een aantal eisen. Later bleek dat ieder consistent formeel systeem S, waarin een zekere hoeveelheid elementaire rekenkunde kan worden uitgevoerd, aan de eisen van P voldoet.

HOOFDSTUK 2 paragraaf 10

De laatste jaren is er veel werk verricht om de onbeslisbaarheid in PA of in systemen die er erg op lijken te bewijzen. De Paris-Harrington stelling bewees de onbewijsbaarheid in PA van een zeker combinatorisch principe. Dit principe, dat niet bewezen kan worden in PA, is in PA equivalent aan de zin dat PA geen valse Goldbachachtige stelllingen weerlegt. Ook is er veel onderzoek gedaan naar een manier om de wiskundige component van ZFC uit te breiden. Verder wordt er ook nog onderzoek gedaan naar de combinatie tussen de onvolledigheidsstellingen en Kolmogorov complexiteit.