

Geschiedenis van de Logica

Joost J. Joosten

26th April 2007

- ▶ Geen "Geschiedenis van de Logica" zonder inhoudelijk op logica in te gaan.

- ▶ Geen "Geschiedenis van de Logica" zonder inhoudelijk op logica in te gaan.
- ▶ Wat *is* logica?

- ▶ Geen "Geschiedenis van de Logica" zonder inhoudelijk op logica in te gaan.
- ▶ Wat *is* logica?

- ▶ Geen "Geschiedenis van de Logica" zonder inhoudelijk op logica in te gaan.
- ▶ Wat *is* logica? In brede zin van het woord: de kunst van het redeneren.

- ▶ Geen "Geschiedenis van de Logica" zonder inhoudelijk op logica in te gaan.
- ▶ Wat *is* logica? In brede zin van het woord: de kunst van het redeneren.
- ▶ Voor mij zijn de twee belangrijkste figuren in de geschiedenis van de Logica:

- ▶ Geen "Geschiedenis van de Logica" zonder inhoudelijk op logica in te gaan.
- ▶ Wat *is* logica? In brede zin van het woord: de kunst van het redeneren.
- ▶ Voor mij zijn de twee belangrijkste figuren in de geschiedenis van de Logica:
 - ▶ Aristoteles (Stageira, 384 v. Chr. - Chalkis, 322 v. Chr.)

- ▶ Geen "Geschiedenis van de Logica" zonder inhoudelijk op logica in te gaan.
- ▶ Wat *is* logica? In brede zin van het woord: de kunst van het redeneren.
- ▶ Voor mij zijn de twee belangrijkste figuren in de geschiedenis van de Logica:
 - ▶ Aristoteles (Stageira, 384 v. Chr. - Chalkis, 322 v. Chr.)
 - ▶ K. Gödel (Brno, 1906- Princeton, 1978)

- ▶ Geen "Geschiedenis van de Logica" zonder inhoudelijk op logica in te gaan.
- ▶ Wat *is* logica? In brede zin van het woord: de kunst van het redeneren.
- ▶ Voor mij zijn de twee belangrijkste figuren in de geschiedenis van de Logica:
 - ▶ Aristoteles (Stageira, 384 v. Chr. - Chalkis, 322 v. Chr.)
 - ▶ K. Gödel (Brno, 1906- Princeton, 1978)
- ▶ Gelukkig heet het vak niet "De Geschiedenis van de Logica"

- ▶ Waarom vind ik eerder genoemde denkers de belangrijkste figuren in "de" geschiedenis van de logica?

- ▶ Waarom vind ik eerder genoemde denkers de belangrijkste figuren in "de" geschiedenis van de logica?
 - ▶ Aristoteles: Aanvang van de studie der logica (syllogismen, causaliteit, noodzakelijkheid, etc.)

- ▶ Waarom vind ik eerder genoemde denkers de belangrijkste figuren in "de" geschiedenis van de logica?
 - ▶ Aristoteles: Aanvang van de studie der logica (syllogismen, causaliteit, noodzakelijkheid, etc.)
 - ▶ Misschien wil ik toch ook wel Euclides aanvoeren voor de eerste opzet tot de axiomatische methode

- ▶ Waarom vind ik eerder genoemde denkers de belangrijkste figuren in "de" geschiedenis van de logica?
 - ▶ Aristoteles: Aanvang van de studie der logica (syllogismen, causaliteit, noodzakelijkheid, etc.)
 - ▶ Misschien wil ik toch ook wel Euclides aanvoeren voor de eerste opzet tot de axiomatische methode
 - ▶ K. Gödel: Het consolideren van de grondbeginselen van de logica (waarheid, bewijsbaarheid, semantiek, syntax, berekenbaarheid, etc.) en het naar een hoger niveau tillen van het vakgebied.

- ▶ Waarom vind ik eerder genoemde denkers de belangrijkste figuren in "de" geschiedenis van de logica?
 - ▶ Aristoteles: Aanvang van de studie der logica (syllogismen, causaliteit, noodzakelijkheid, etc.)
 - ▶ Misschien wil ik toch ook wel Euclides aanvoeren voor de eerste opzet tot de axiomatische methode
 - ▶ K. Gödel: Het consolideren van de grondbeginselen van de logica (waarheid, bewijsbaarheid, semantiek, syntax, berekenbaarheid, etc.) en het naar een hoger niveau tillen van het vakgebied.
- ▶ Je ziet, zonder enige kennis van wat deze woorden betekenen is een geschiedenis studie leeg en zinloos

- ▶ In dit college focussen we op Kurt Gödel en zijn werken

- ▶ In dit college focussen we op Kurt Gödel en zijn werken
- ▶ We gaan dit proberen te begrijpen

- ▶ In dit college focussen we op Kurt Gödel en zijn werken
- ▶ We gaan dit proberen te begrijpen
- ▶ En in een brede historische context proberen te plaatsen

- ▶ Gödel's onvolledigheidsstellingen spreken erg tot de verbeelding, temeer ook omdat zij geformuleerd zijn in een technisch jargon waar de woorden naar hun technische betekenis ook een natuurlijke taal betekenis hebben

- ▶ Gödel's onvolledigheidsstellingen spreken erg tot de verbeelding, temeer ook omdat zij geformuleerd zijn in een technisch jargon waar de woorden naar hun technische betekenis ook een natuurlijke taal betekenis hebben
- ▶ Gödel 1: Voor ieder consistent formeel systeem dat een beetje, maar voldoende rekenkunde bevat, zijn er formules te vinden die wel waar zijn maar waarvan de waarheid niet door het systeem kan worden bewezen.

- ▶ Gödel's onvolledigheidsstellingen spreken erg tot de verbeelding, temeer ook omdat zij geformuleerd zijn in een technisch jargon waar de woorden naar hun technische betekenis ook een natuurlijke taal betekenis hebben
- ▶ Gödel 1: Voor ieder consistent formeel systeem dat een beetje, maar voldoende rekenkunde bevat, zijn er formules te vinden die wel waar zijn maar waarvan de waarheid niet door het systeem kan worden bewezen.
- ▶ Gödel/Rosser 2: Ieder sterk genoeg en consistent formeel systeem kan zijn eigen consistentie niet bewijzen

- ▶ Gödel's onvolledigheidsstellingen spreken erg tot de verbeelding, temeer ook omdat zij geformuleerd zijn in een technisch jargon waar de woorden naar hun technische betekenis ook een natuurlijke taal betekenis hebben
- ▶ Gödel 1: Voor ieder consistent formeel systeem dat een beetje, maar voldoende rekenkunde bevat, zijn er formules te vinden die wel waar zijn maar waarvan de waarheid niet door het systeem kan worden bewezen.
- ▶ Gödel/Rosser 2: Ieder sterk genoeg en consistent formeel systeem kan zijn eigen consistentie niet bewijzen

- ▶ Gödel's onvolledigheidsstellingen spreken erg tot de verbeelding, temeer ook omdat zij geformuleerd zijn in een technisch jargon waar de woorden naar hun technische betekenis ook een natuurlijke taal betekenis hebben
- ▶ Gödel 1: Voor ieder consistent formeel systeem dat een beetje, maar voldoende rekenkunde bevat, zijn er formules te vinden die wel waar zijn maar waarvan de waarheid niet door het systeem kan worden bewezen.
- ▶ Gödel/Rosser 2: Ieder sterk genoeg en consistent formeel systeem kan zijn eigen consistentie niet bewijzen

Gödel's incompleteness theorem can be intuitively understood without a mathematical approach and proof: the incompleteness concept appears in clearly recognizable form in Zen Buddhism.

- ▶ ledere week lezen we een stuk uit "Gödel's Theorem, An incomplete guide to its use and abuse"

- ▶ Iedere week lezen we een stuk uit "Gödel's Theorem, An incomplete guide to its use and abuse"
- ▶ In het college is er een voordracht van ongeveer 45 minuten van een student/groepje van 2-3 studenten over de literatuur van die week

- ▶ Iedere week lezen we een stuk uit "Gödel's Theorem, An incomplete guide to its use and abuse"
- ▶ In het college is er een voordracht van ongeveer 45 minuten van een student/groepje van 2-3 studenten over de literatuur van die week
- ▶ Vervolgens wordt er commentaar op deze voordracht geleverd door een ander groepje studenten. Dit commentaar bestaat uit het volgende:

- ▶ Iedere week lezen we een stuk uit "Gödel's Theorem, An incomplete guide to its use and abuse"
- ▶ In het college is er een voordracht van ongeveer 45 minuten van een student/groepje van 2-3 studenten over de literatuur van die week
- ▶ Vervolgens wordt er commentaar op deze voordracht geleverd door een ander groepje studenten. Dit commentaar bestaat uit het volgende:
 - ▶ Zeer korte samenvatting (+- 5 minuten) in eigen woorden van wat de voordracht inhield

- ▶ Iedere week lezen we een stuk uit "Gödel's Theorem, An incomplete guide to its use and abuse"
- ▶ In het college is er een voordracht van ongeveer 45 minuten van een student/groepje van 2-3 studenten over de literatuur van die week
- ▶ Vervolgens wordt er commentaar op deze voordracht geleverd door een ander groepje studenten. Dit commentaar bestaat uit het volgende:
 - ▶ Zeer korte samenvatting (+- 5 minuten) in eigen woorden van wat de voordracht inhield
 - ▶ Enkele vragen aan de sprekers die opening geven tot een discussie tussen voordragers en commentatoren (≤ 15 minuten)

- ▶ Iedere week lezen we een stuk uit "Gödel's Theorem, An incomplete guide to its use and abuse"
- ▶ In het college is er een voordracht van ongeveer 45 minuten van een student/groepje van 2-3 studenten over de literatuur van die week
- ▶ Vervolgens wordt er commentaar op deze voordracht geleverd door een ander groepje studenten. Dit commentaar bestaat uit het volgende:
 - ▶ Zeer korte samenvatting (+- 5 minuten) in eigen woorden van wat de voordracht inhield
 - ▶ Enkele vragen aan de sprekers die opening geven tot een discussie tussen voordragers en commentatoren (≤ 15 minuten)
 - ▶ Het is de bedoeling dat de discussie tussen voordragers en commentatoren een inleiding geeft tot een algemene discussie die geleid wordt door een van de commentatoren (≤ 20 minuten)

- ▶ Iedere week lezen we een stuk uit "Gödel's Theorem, An incomplete guide to its use and abuse"
- ▶ In het college is er een voordracht van ongeveer 45 minuten van een student/groepje van 2-3 studenten over de literatuur van die week
- ▶ Vervolgens wordt er commentaar op deze voordracht geleverd door een ander groepje studenten. Dit commentaar bestaat uit het volgende:
 - ▶ Zeer korte samenvatting (+- 5 minuten) in eigen woorden van wat de voordracht inhield
 - ▶ Enkele vragen aan de sprekers die opening geven tot een discussie tussen voordragers en commentatoren (≤ 15 minuten)
 - ▶ Het is de bedoeling dat de discussie tussen voordragers en commentatoren een inleiding geeft tot een algemene discussie die geleid wordt door een van de commentatoren (≤ 20 minuten)
- ▶ Na de discussie + pauze volgt een college van Joost

- ▶ Schrijven en uploaden (eventueel in teamverband) van een samenvatting over een deel van het boek. Studenten kunnen zich inschrijven op BSCW over welk deel van het boek ze willen spreken.

- ▶ Schrijven en uploaden (eventueel in teamverband) van een samenvatting over een deel van het boek. Studenten kunnen zich inschrijven op BSCW over welk deel van het boek ze willen spreken.
- ▶ Wekelijks bedenken van een mogelijke examenvraag over de stof van die week. Deze vraag uploaden en antwoorden van twee vragen (alle vragen moeten minimaal één antwoord hebben ontvangen en mogen er maximaal 3 hebben (Joost maakt ook opgaven!))

- ▶ Schrijven en uploaden (eventueel in teamverband) van een samenvatting over een deel van het boek. Studenten kunnen zich inschrijven op BSCW over welk deel van het boek ze willen spreken.
- ▶ Wekelijks bedenken van een mogelijke examenvraag over de stof van die week. Deze vraag uploaden en antwoorden van twee vragen (alle vragen moeten minimaal één antwoord hebben ontvangen en mogen er maximaal 3 hebben (Joost maakt ook opgaven!))
- ▶ Wekelijks minimaal twee discussiepunten posten. Uiteindelijk moet iedere student minimaal twee threads hebben gestart.

- ▶ Schrijven en uploaden (eventueel in teamverband) van een samenvatting over een deel van het boek. Studenten kunnen zich inschrijven op BSCW over welk deel van het boek ze willen spreken.
- ▶ Wekelijks bedenken van een mogelijke examenvraag over de stof van die week. Deze vraag uploaden en antwoorden van twee vragen (alle vragen moeten minimaal één antwoord hebben ontvangen en mogen er maximaal 3 hebben (Joost maakt ook opgaven!))
- ▶ Wekelijks minimaal twee discussiepunten posten. Uiteindelijk moet iedere student minimaal twee threads hebben gestart.
- ▶ Eindtentamen

- ▶ Schrijven en uploaden (eventueel in teamverband) van een samenvatting over een deel van het boek. Studenten kunnen zich inschrijven op BSCW over welk deel van het boek ze willen spreken.
- ▶ Wekelijks bedenken van een mogelijke examenvraag over de stof van die week. Deze vraag uploaden en antwoorden van twee vragen (alle vragen moeten minimaal één antwoord hebben ontvangen en mogen er maximaal 3 hebben (Joost maakt ook opgaven!))
- ▶ Wekelijks minimaal twee discussiepunten posten. Uiteindelijk moet iedere student minimaal twee threads hebben gestart.
- ▶ Eindtentamen
- ▶ Essay

- ▶ Schrijven en uploaden (eventueel in teamverband) van een samenvatting over een deel van het boek. Studenten kunnen zich inschrijven op BSCW over welk deel van het boek ze willen spreken.
- ▶ Wekelijks bedenken van een mogelijke examenvraag over de stof van die week. Deze vraag uploaden en antwoorden van twee vragen (alle vragen moeten minimaal één antwoord hebben ontvangen en mogen er maximaal 3 hebben (Joost maakt ook opgaven!))
- ▶ Wekelijks minimaal twee discussiepunten posten. Uiteindelijk moet iedere student minimaal twee threads hebben gestart.
- ▶ Eindtentamen
- ▶ Essay
- ▶ Verschil Niveau 2/3:

- ▶ Schrijven en uploaden (eventueel in teamverband) van een samenvatting over een deel van het boek. Studenten kunnen zich inschrijven op BSCW over welk deel van het boek ze willen spreken.
- ▶ Wekelijks bedenken van een mogelijke examenvraag over de stof van die week. Deze vraag uploaden en antwoorden van twee vragen (alle vragen moeten minimaal één antwoord hebben ontvangen en mogen er maximaal 3 hebben (Joost maakt ook opgaven!))
- ▶ Wekelijks minimaal twee discussiepunten posten. Uiteindelijk moet iedere student minimaal twee threads hebben gestart.
- ▶ Eindtentamen
- ▶ Essay
- ▶ Verschil Niveau 2/3:
 - ▶ Meer breedte bij Niveau 3 met als objectief gegeven dat er bronnen moeten worden gebruikt anders dan ons lesboek

- ▶ Schrijven en uploaden (eventueel in teamverband) van een samenvatting over een deel van het boek. Studenten kunnen zich inschrijven op BSCW over welk deel van het boek ze willen spreken.
- ▶ Wekelijks bedenken van een mogelijke examenvraag over de stof van die week. Deze vraag uploaden en antwoorden van twee vragen (alle vragen moeten minimaal één antwoord hebben ontvangen en mogen er maximaal 3 hebben (Joost maakt ook opgaven!))
- ▶ Wekelijks minimaal twee discussiepunten posten. Uiteindelijk moet iedere student minimaal twee threads hebben gestart.
- ▶ Eindtentamen
- ▶ Essay
- ▶ Verschil Niveau 2/3:
 - ▶ Meer breedte bij Niveau 3 met als objectief gegeven dat er bronnen moeten worden gebruikt anders dan ons lesboek
 - ▶ Bij het eindtentamen

Voordracht

- ▶ Voor de eerste drie weken heb ik mensen nodig die zeer goed in hun logica zitten

Voordracht

- ▶ Voor de eerste drie weken heb ik mensen nodig die zeer goed in hun logica zitten
- ▶ Ik moet nu weten wie het volgende week woensdag doe(t/n)

Voordracht

- ▶ Voor de eerste drie weken heb ik mensen nodig die zeer goed in hun logica zitten
- ▶ Ik moet nu weten wie het volgende week woensdag doe(t/n)
- ▶ Teken in op BSCW en kom met elkaar tot een vergelijk

Voordracht

- ▶ Voor de eerste drie weken heb ik mensen nodig die zeer goed in hun logica zitten
- ▶ Ik moet nu weten wie het volgende week woensdag doe(t/n)
- ▶ Teken in op BSCW en kom met elkaar tot een vergelijk
- ▶ Hetzelfde geldt voor de commentatoren

Voordracht

- ▶ Voor de eerste drie weken heb ik mensen nodig die zeer goed in hun logica zitten
- ▶ Ik moet nu weten wie het volgende week woensdag doe(t/n)
- ▶ Teken in op BSCW en kom met elkaar tot een vergelijk
- ▶ Hetzelfde geldt voor de commentatoren
- ▶ BSCW wordt snel operationeel (excuus voor de vertraging, maar er is dus een bijzonder goed en mooi excuus :-)

Met uitzondering van de eerste week:

- ▶ De samenvatting moet uiterlijk maandag avond naar Joost en de commentatoren van die week gestuurd worden. Op verzoek kan er ook op maandag worden afgesproken om de voordracht samen met de commentatoren door te nemen.

Met uitzondering van de eerste week:

- ▶ De samenvatting moet uiterlijk maandag avond naar Joost en de commentatoren van die week gestuurd worden. Op verzoek kan er ook op maandag worden afgesproken om de voordracht samen met de commentatoren door te nemen.
- ▶ Op donderdag avond moet iedere student een mogelijke examenvraag over de stof van die week (i.e., van de dag ervoor) online hebben geplaatst.

Met uitzondering van de eerste week:

- ▶ De samenvatting moet uiterlijk maandag avond naar Joost en de commentatoren van die week gestuurd worden. Op verzoek kan er ook op maandag worden afgesproken om de voordracht samen met de commentatoren door te nemen.
- ▶ Op donderdag avond moet iedere student een mogelijke examenvraag over de stof van die week (i.e., van de dag ervoor) online hebben geplaatst.
- ▶ Op donderdag avond moet iedere student een discussiepunt over de stof van die week online hebben geplaatst.

Met uitzondering van de eerste week:

- ▶ De samenvatting moet uiterlijk maandag avond naar Joost en de commentatoren van die week gestuurd worden. Op verzoek kan er ook op maandag worden afgesproken om de voordracht samen met de commentatoren door te nemen.
- ▶ Op donderdag avond moet iedere student een mogelijke examenvraag over de stof van die week (i.e., van de dag ervoor) online hebben geplaatst.
- ▶ Op donderdag avond moet iedere student een discussiepunt over de stof van die week online hebben geplaatst.
- ▶ Uiterlijk vrijdag avond moet iedere student twee mogelijke examenvragen hebben beantwoord (zie restricties)

Met uitzondering van de eerste week:

- ▶ De samenvatting moet uiterlijk maandag avond naar Joost en de commentatoren van die week gestuurd worden. Op verzoek kan er ook op maandag worden afgesproken om de voordracht samen met de commentatoren door te nemen.
- ▶ Op donderdag avond moet iedere student een mogelijke examenvraag over de stof van die week (i.e., van de dag ervoor) online hebben geplaatst.
- ▶ Op donderdag avond moet iedere student een discussiepunt over de stof van die week online hebben geplaatst.
- ▶ Uiterlijk vrijdag avond moet iedere student twee mogelijke examenvragen hebben beantwoord (zie restricties)
- ▶ Uiterlijk vrijdag avond moet iedere student minimaal één discussiepunt hebben beantwoord

Met uitzondering van de eerste week:

- ▶ De samenvatting moet uiterlijk maandag avond naar Joost en de commentatoren van die week gestuurd worden. Op verzoek kan er ook op maandag worden afgesproken om de voordracht samen met de commentatoren door te nemen.
- ▶ Op donderdag avond moet iedere student een mogelijke examenvraag over de stof van die week (i.e., van de dag ervoor) online hebben geplaatst.
- ▶ Op donderdag avond moet iedere student een discussiepunt over de stof van die week online hebben geplaatst.
- ▶ Uiterlijk vrijdag avond moet iedere student twee mogelijke examenvragen hebben beantwoord (zie restricties)
- ▶ Uiterlijk vrijdag avond moet iedere student minimaal één discussiepunt hebben beantwoord
- ▶ Vragen?

- ▶ Hoewel Gödel veel heeft gedaan heeft hij toch een speciale interesse voor wiskundige logica

- ▶ Hoewel Gödel veel heeft gedaan heeft hij toch een speciale interesse voor wiskundige logica
- ▶ I.h.b., m.b.t. de grondslagen van de wiskunde

- ▶ Hoewel Gödel veel heeft gedaan heeft hij toch een speciale interesse voor wiskundige logica
- ▶ I.h.b., m.b.t. de grondslagen van de wiskunde
- ▶ Waar gaat wiskunde over?

- ▶ Hoewel Gödel veel heeft gedaan heeft hij toch een speciale interesse voor wiskundige logica
- ▶ I.h.b., m.b.t. de grondslagen van de wiskunde
- ▶ Waar gaat wiskunde over?
- ▶ Wat heeft logica met wiskunde van doen?

- ▶ Hoewel Gödel veel heeft gedaan heeft hij toch een speciale interesse voor wiskundige logica
- ▶ I.h.b., m.b.t. de grondslagen van de wiskunde
- ▶ Waar gaat wiskunde over?
- ▶ Wat heeft logica met wiskunde van doen?

- ▶ Hoewel Gödel veel heeft gedaan heeft hij toch een speciale interesse voor wiskundige logica
- ▶ I.h.b., m.b.t. de grondslagen van de wiskunde
- ▶ Waar gaat wiskunde over?
- ▶ Wat heeft logica met wiskunde van doen? (O.a., Logicisme, Frege, Russell, etc.)

- ▶ Hoewel Gödel veel heeft gedaan heeft hij toch een speciale interesse voor wiskundige logica
- ▶ I.h.b., m.b.t. de grondslagen van de wiskunde
- ▶ Waar gaat wiskunde over?
- ▶ Wat heeft logica met wiskunde van doen? (O.a., Logicisme, Frege, Russell, etc.)
- ▶ Wat heeft wiskunde met filosofie van doen?

- ▶ Wiskundige theorieën bevatten tegenspraken: $0 = 1$, $A \wedge \neg A$,
 $1 = \infty \cdot \frac{1}{\infty} = 2$, etc

- ▶ Wiskundige theorieën bevatten tegenspraken: $0 = 1$, $A \wedge \neg A$,
 $1 = \infty \cdot \frac{1}{\infty} = 2$, etc
 - ▶ Cantor bewees dat $A < \mathcal{P}(A)$, maar wat zegt dit over $\{A \mid A = A\}$?

- ▶ Wiskundige theorieën bevatten tegenspraken: $0 = 1$, $A \wedge \neg A$,
 $1 = \infty \cdot \frac{1}{\infty} = 2$, etc
 - ▶ Cantor bewees dat $A < \mathcal{P}(A)$, maar wat zegt dit over $\{A \mid A = A\}$?
 - ▶ Frege, in een poging wiskunde tot logica te reduceren, presenteerde een systeem waar Russell zijn beroemde paradox in kon formuleren: $\{A \mid A \notin A\}$

- ▶ Wiskundige theorieën bevatten tegenspraken: $0 = 1$, $A \wedge \neg A$,
 $1 = \infty \cdot \frac{1}{\infty} = 2$, etc
 - ▶ Cantor bewees dat $A < \mathcal{P}(A)$, maar wat zegt dit over $\{A \mid A = A\}$?
 - ▶ Frege, in een poging wiskunde tot logica te reduceren, presenteerde een systeem waar Russell zijn beroemde paradox in kon formuleren: $\{A \mid A \notin A\}$
 - ▶ Het kleinste oninteressante getal is best wel interessant

- ▶ Wiskundige theorieën bevatten tegenspraken: $0 = 1$, $A \wedge \neg A$,
 $1 = \infty \cdot \frac{1}{\infty} = 2$, etc
 - ▶ Cantor bewees dat $A < \mathcal{P}(A)$, maar wat zegt dit over $\{A \mid A = A\}$?
 - ▶ Frege, in een poging wiskunde tot logica te reduceren, presenteerde een systeem waar Russell zijn beroemde paradox in kon formuleren: $\{A \mid A \notin A\}$
 - ▶ Het kleinste oninteressante getal is best wel interessant
 - ▶ Het kleinste getal dat niet met minder dan honderd woorden beschreven kan worden

- ▶ Wiskundige theorieën bevatten tegenspraken: $0 = 1$, $A \wedge \neg A$,
 $1 = \infty \cdot \frac{1}{\infty} = 2$, etc
 - ▶ Cantor bewees dat $A < \mathcal{P}(A)$, maar wat zegt dit over $\{A \mid A = A\}$?
 - ▶ Frege, in een poging wiskunde tot logica te reduceren, presenteerde een systeem waar Russell zijn beroemde paradox in kon formuleren: $\{A \mid A \notin A\}$
 - ▶ Het kleinste oninteressante getal is best wel interessant
 - ▶ Het kleinste getal dat niet met minder dan honderd woorden beschreven kan worden
 - ▶ Deze zin is niet waar.

- ▶ Wiskundige theorieën bevatten tegenspraken: $0 = 1$, $A \wedge \neg A$,
 $1 = \infty \cdot \frac{1}{\infty} = 2$, etc
 - ▶ Cantor bewees dat $A < \mathcal{P}(A)$, maar wat zegt dit over $\{A \mid A = A\}$?
 - ▶ Frege, in een poging wiskunde tot logica te reduceren, presenteerde een systeem waar Russell zijn beroemde paradox in kon formuleren: $\{A \mid A \notin A\}$
 - ▶ Het kleinste oninteressante getal is best wel interessant
 - ▶ Het kleinste getal dat niet met minder dan honderd woorden beschreven kan worden
 - ▶ Deze zin is niet waar.

- ▶ Wiskundige theorieën bevatten tegenspraken: $0 = 1$, $A \wedge \neg A$,
 $1 = \infty \cdot \frac{1}{\infty} = 2$, etc
 - ▶ Cantor bewees dat $A < \mathcal{P}(A)$, maar wat zegt dit over $\{A \mid A = A\}$?
 - ▶ Frege, in een poging wiskunde tot logica te reduceren, presenteerde een systeem waar Russell zijn beroemde paradox in kon formuleren: $\{A \mid A \notin A\}$
 - ▶ Het kleinste oninteressante getal is best wel interessant
 - ▶ Het kleinste getal dat niet met minder dan honderd woorden beschreven kan worden
 - ▶ Deze zin is niet waar. (niet bewijsbaar)

- ▶ Wiskundige theorieën bevatten tegenspraken: $0 = 1$, $A \wedge \neg A$,
 $1 = \infty \cdot \frac{1}{\infty} = 2$, etc
 - ▶ Cantor bewees dat $A < \mathcal{P}(A)$, maar wat zegt dit over $\{A \mid A = A\}$?
 - ▶ Frege, in een poging wiskunde tot logica te reduceren, presenteerde een systeem waar Russell zijn beroemde paradox in kon formuleren: $\{A \mid A \notin A\}$
 - ▶ Het kleinste oninteressante getal is best wel interessant
 - ▶ Het kleinste getal dat niet met minder dan honderd woorden beschreven kan worden
 - ▶ Deze zin is niet waar. (niet bewijsbaar)
- ▶ Andere theorieën bleken onvolledig:

- ▶ Wiskundige theorieën bevatten tegenspraken: $0 = 1$, $A \wedge \neg A$,
 $1 = \infty \cdot \frac{1}{\infty} = 2$, etc
 - ▶ Cantor bewees dat $A < \mathcal{P}(A)$, maar wat zegt dit over $\{A \mid A = A\}$?
 - ▶ Frege, in een poging wiskunde tot logica te reduceren, presenteerde een systeem waar Russell zijn beroemde paradox in kon formuleren: $\{A \mid A \notin A\}$
 - ▶ Het kleinste oninteressante getal is best wel interessant
 - ▶ Het kleinste getal dat niet met minder dan honderd woorden beschreven kan worden
 - ▶ Deze zin is niet waar. (niet bewijsbaar)
- ▶ Andere theorieën bleken onvolledig:
 - ▶ Euclidische meetkunde bewijst het parallellen postulaat niet

- ▶ Wiskundige theorieën bevatten tegenspraken: $0 = 1$, $A \wedge \neg A$,
 $1 = \infty \cdot \frac{1}{\infty} = 2$, etc
 - ▶ Cantor bewees dat $A < \mathcal{P}(A)$, maar wat zegt dit over $\{A \mid A = A\}$?
 - ▶ Frege, in een poging wiskunde tot logica te reduceren, presenteerde een systeem waar Russell zijn beroemde paradox in kon formuleren: $\{A \mid A \notin A\}$
 - ▶ Het kleinste oninteressante getal is best wel interessant
 - ▶ Het kleinste getal dat niet met minder dan honderd woorden beschreven kan worden
 - ▶ Deze zin is niet waar. (niet bewijsbaar)
- ▶ Andere theorieën bleken onvolledig:
 - ▶ Euclidische meetkunde bewijst het parallellen postulaat niet
 - ▶ Veel later, en ook door toedoen van Gödel, bleek dat de continuum hypothese onafhankelijk van ZFC te zijn.

- ▶ Wiskundige theorieën bevatten tegenspraken: $0 = 1$, $A \wedge \neg A$, $1 = \infty \cdot \frac{1}{\infty} = 2$, etc
 - ▶ Cantor bewees dat $A < \mathcal{P}(A)$, maar wat zegt dit over $\{A \mid A = A\}$?
 - ▶ Frege, in een poging wiskunde tot logica te reduceren, presenteerde een systeem waar Russell zijn beroemde paradox in kon formuleren: $\{A \mid A \notin A\}$
 - ▶ Het kleinste oninteressante getal is best wel interessant
 - ▶ Het kleinste getal dat niet met minder dan honderd woorden beschreven kan worden
 - ▶ Deze zin is niet waar. (niet bewijsbaar)
- ▶ Andere theorieën bleken onvolledig:
 - ▶ Euclidische meetkunde bewijst het parallellen postulaat niet
 - ▶ Veel later, en ook door toedoen van Gödel, bleek dat de continuum hypothese onafhankelijk van ZFC te zijn.
- ▶ Wat zeggen onafhankelijkheidsresultaten over de wiskundige werkelijkheid?

- ▶ Hoe kunnen we weten dat de methoden die we gebruiken correct, en in het bijzonder, consistent zijn?

- ▶ Hoe kunnen we weten dat de methoden die we gebruiken correct, en in het bijzonder, consistent zijn?
- ▶ Brouwer en intuïtionisme: de wiskundige werkelijkheid is geen creatie die af is en die wij ontdekken, edoch in zeker opzicht *creëren* wij haar.

- ▶ Hoe kunnen we weten dat de methoden die we gebruiken correct, en in het bijzonder, consistent zijn?
- ▶ Brouwer en intuïtionisme: de wiskundige werkelijkheid is geen creatie die af is en die wij ontdekken, edoch in zeker opzicht *creëren* wij haar.
- ▶ Hilbert's programma: laat in zwakkere theorieën (finitisme) zien dat sterkere methodes geen contradicties met zich mee brengen

- ▶ Hoe kunnen we weten dat de methoden die we gebruiken correct, en in het bijzonder, consistent zijn?
- ▶ Brouwer en intuïtionisme: de wiskundige werkelijkheid is geen creatie die af is en die wij ontdekken, edoch in zeker opzicht *creëren* wij haar.
- ▶ Hilbert's programma: laat in zwakkere theorieën (finitisme) zien dat sterkere methodes geen contradicties met zich mee brengen
- ▶ Of ten minste, in een klein fragment van formules, zoals de zogeheten Π_0^1 -formules

- ▶ Hoe kunnen we weten dat de methoden die we gebruiken correct, en in het bijzonder, consistent zijn?
- ▶ Brouwer en intuïtionisme: de wiskundige werkelijkheid is geen creatie die af is en die wij ontdekken, edoch in zeker opzicht *creëren* wij haar.
- ▶ Hilbert's programma: laat in zwakkere theorieën (finitisme) zien dat sterkere methodes geen contradicties met zich mee brengen
- ▶ Of ten minste, in een klein fragment van formules, zoals de zogeheten Π_0^1 -formules
- ▶ Hier is een probleem wat object- en meta-taal betreft, maar middels coderingen kan dit worden overbrugd.

- ▶ Hoe kunnen we weten dat de methoden die we gebruiken correct, en in het bijzonder, consistent zijn?
- ▶ Brouwer en intuïtionisme: de wiskundige werkelijkheid is geen creatie die af is en die wij ontdekken, edoch in zeker opzicht *creëren* wij haar.
- ▶ Hilbert's programma: laat in zwakkere theorieën (finitisme) zien dat sterkere methodes geen contradicties met zich mee brengen
- ▶ Of ten minste, in een klein fragment van formules, zoals de zogeheten Π_0^1 -formules
- ▶ Hier is een probleem wat object- en meta-taal betreft, maar middels coderingen kan dit worden overbrugd.
- ▶ Het is niet moeilijk om in te zien, dat Π_1^0 -reflectie over T als schema equivalent is aan de enkele uitspraak $\text{Con}(T)$

- ▶ Hoe kunnen we weten dat de methoden die we gebruiken correct, en in het bijzonder, consistent zijn?
- ▶ Brouwer en intuïtionisme: de wiskundige werkelijkheid is geen creatie die af is en die wij ontdekken, edoch in zeker opzicht *creëren* wij haar.
- ▶ Hilbert's programma: laat in zwakkere theorieën (finitisme) zien dat sterkere methodes geen contradicties met zich mee brengen
- ▶ Of ten minste, in een klein fragment van formules, zoals de zogeheten Π_0^1 -formules
- ▶ Hier is een probleem wat object- en meta-taal betreft, maar middels coderingen kan dit worden overbrugd.
- ▶ Het is niet moeilijk om in te zien, dat Π_1^0 -reflectie over T als schema equivalent is aan de enkele uitspraak $\text{Con}(T)$
- ▶ En hier brengt Gódel 2 de nekslag

- ▶ Hoe kunnen we weten dat de methoden die we gebruiken correct, en in het bijzonder, consistent zijn?
- ▶ Brouwer en intuïtionisme: de wiskundige werkelijkheid is geen creatie die af is en die wij ontdekken, edoch in zeker opzicht *creëren* wij haar.
- ▶ Hilbert's programma: laat in zwakkere theorieën (finitisme) zien dat sterkere methodes geen contradicties met zich mee brengen
- ▶ Of ten minste, in een klein fragment van formules, zoals de zogeheten Π_0^1 -formules
- ▶ Hier is een probleem wat object- en meta-taal betreft, maar middels coderingen kan dit worden overbrugd.
- ▶ Het is niet moeilijk om in te zien, dat Π_1^0 -reflectie over T als schema equivalent is aan de enkele uitspraak $\text{Con}(T)$
- ▶ En hier brengt Gödel 2 de nekslag
- ▶ Overigens was Gödel 1 Hilbert meer een doorn in zijn oog en in zijn *there is no ignorabimus*

Een citaat van D. Hilbert:

- ▶ Für den Mathematiker gibt es kein Ignorabimus, und meiner Meinung nach auch für die Naturwissenschaft überhaupt nicht. ... Der wahre Grund, warum es nicht gelang, ein unlösbares Problem zu finden, besteht meiner Meinung nach darin, da es unlösbare Probleme überhaupt nicht gibt. Statt des törichtigen Ignoramibus heie im Gegenteil unsere Lösung: Wir müssen wissen wir werden wissen."

Een citaat van D. Hilbert:

- ▶ Für den Mathematiker gibt es kein Ignorabimus, und meiner Meinung nach auch für die Naturwissenschaft überhaupt nicht. ... Der wahre Grund, warum es nicht gelang, ein unlösbares Problem zu finden, besteht meiner Meinung nach darin, da es unlösbare Probleme überhaupt nicht gibt. Statt des törichten Ignoramibus heie im Gegenteil unsere Lösung: Wir müssen wissen wir werden wissen."
- ▶ For the mathematician there is no Ignorabimus, and, in my opinion, not at all for natural science either. ... The true reason why [no one] has succeeded in finding an unsolvable problem is, in my opinion, that there is no unsolvable problem. In contrast to the foolish Ignoramibus, our credo avers: We must know, We shall know."