# 1 Ejercicio 2 Pagina 258 Capitulo 13

Consideremos el siguiente lenguaje de primer orden ¿ Cuales de las siguientes sentencias son verdaderas en $A$ ?
$A = \langle A, P, Q, R, S, c, d\rangle$
A = $\{1, 2, 3, 4\}$
P = 1,3
Q = $\emptyset$
R = $\langle 1, 2\rangle$,$\langle 1, 3\rangle$, $\langle 3, 4\rangle$,$\langle 3, 3\rangle$,$\langle 2, 3\rangle$
S = $\langle 1, 2\rangle$,$\langle 1, 3\rangle$, $\langle 1, 4\rangle$,$\langle 3, 4\rangle$,$\langle 1, 1\rangle$
c = 1
d = 2

**La notación no es del todo correcto. Yo escribiría:**

$\mathcal{A} = \langle A, P, Q, R, S, c, d\rangle$
$A = \{1, 2, 3, 4\}$
$P^{\mathcal{A}} = \{1, 3\}$
$Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$
$R^{\mathcal{A}} = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$
$S^{\mathcal{A}} = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$
$c = 1$
$d = 2$

(a) $A \models Pc \vee Qd$

(b) $A \models \neg Pd$

(c) $A \models (Pc \wedge \neg Qd)$

(d) $A \models (Pc \rightarrow \neg Qd)$

(e) $A \models \exists x(\neg Qx \vee (Px \wedge Qx))$

(f) $A \not\models \exists x(Px \wedge Qx)$ //No hay ningún elemento en el dominio A que pertenezca a la vez al subconjunto P y Q
**Correcto: yo diría: "... a los subconjuntos $P^{\mathcal{A}}$ y $Q^{\mathcal{A}}$."**

(g) $A \models \forall xQx \vee \exists x\neg Qx$

(h) $A \not\models \forall x(Px \rightarrow Qx)$ //Qx siempre será falsa en el dominio A ya que no hay ningun elmento en el subconjunto. Px puede ser verdadera con 1 y 3 hecho que falsearia la formula
**no sé si usas "falsearía" correctamente, pero se entiende. Me parece que has traducido *falsify* a Español. Por lo que yo sepa, *falsear* se refiere a por ejemplo, falsear dinero y no a hacer falso... Pero pueda que me equivoque...**

(i) $A \models \forall x(Qx \rightarrow \neg Px)$

(j) $A \not\models \forall x Rcx$ //No todos los elementos del dominio forman parte de una relacion 1,x
**Respuesta es correcta pero el argumento está un poco *ill-formulated*. Yo daría un contra-ejemplo: $\langle 1,1\rangle \notin R^{\mathcal{A}}$.**

(k) $A \not\models \forall x Scx$ //idem
**Doncs no: ha d'esser $\mathcal{A} \models \forall x Scx$ perque mira bé, tenim que $\langle 1,a\rangle \in S^{\mathcal{A}}$ per tot $a \in A$.**

## 2 Ejercicio 3 Pagina 258 Capitulo 13

(a) $A \not\models \forall x \forall y (Rxy \rightarrow \neg Ryx)$ //No se cumple con el valor $\langle 3,3\rangle$

(b) $A \not\models \forall x \forall y (\neg Sxy \rightarrow \neg Ryx)$ //Si ponemos el valor **valor?, mejor, el par de elementos** $\langle 2,3\rangle$ hacemos verdadero el antecedente y falso el consecuente
**Por cierto, MUY BIEN!**

(c) $A \models \forall x (Rcx \rightarrow Scx)$

(d) $A \not\models \forall x \forall y (Rxy \rightarrow Sxy)$ //No se cumple con el valor $\langle 3,3\rangle$

(e) $A \not\models \forall x \forall y \forall z ((Sxy \wedge Syz) \rightarrow Rxz$ //Hacemos verdadero el antecedente $(Sxy \wedge Syz)$ con los valores x=1,y=1, z=4. Con estos valores se hace verdadero el antecedente y falso el consecuente y por tanto no se da que para todo xyz se siga de $A$
**Muy bien. Por cierto $x = y = z = 1$ también funciona.**

(f) $A \not\models \forall x Rxx$ //No es cierto que todos los numeros **(elementos)** del dominio se relacionen consigo mismos **(Con $R$)**, solo el $\langle 3,3\rangle$

(g) $A \not\models \forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx)$ //Con los valores x = 1 e y = 2 encontramos un caso que la formula no se sigue de **"en" en vez de "de"** $A$

(h) $A \models \forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$
**NO: take 1, 3 and 4... I have checked this exercise till here ignoring (i)–(m) due to a lack of time but I hope these answers already clarify a lot.**

(i) $A \not\models \forall x \forall y (Rxy \rightarrow \neg Ryx)$ //El valor $\langle 3,3\rangle$ hace verdadero el antecedente y falso el consecuente falseando así la formula

(j) $A \not\models \forall x \neg Sxx$ //No es cierto que todos los elementos del dominio no tengan una relacion con sí misma, hay uno que sí $\langle 1,1\rangle$

(k) $A \not\models \forall x \forall y (Sxy \rightarrow Syx)$ // El valor x = 1, y = 2 hace verdadero el antecedente y falso el consecuente.

(l) $A \models \forall x \forall y \forall z ((Sxy \wedge Syz) \rightarrow Sxz)$

(m) $A \models \forall x \forall y (Sxy \rightarrow \neg Syx)$

***Duda del ejercicio 4** / $\forall x(Px \rightarrow \exists y Ryx)$
La resolución del libro dice que es Falsa. No obstante, si ponemos x = 3 e y = 3 tenemos que es cierto que del dominio, del subconjunto de P (1 , 3) hay un elemento que es 3,3. Esto la hace verdadera. Seria posible aclarar porque es falsa o en su defecto, porque es verdadera $\forall x(Px \rightarrow \exists y Rxy)$?
**Hint: view $R$ as an arrow in $\mathcal{A}$. Then the one says that any point belonging to $P^{\mathcal{A}}$ is the starting-point of an arrow while the other says that any point belonging to $P^{\mathcal{A}}$ is the end-point of an arrow...**

# 3 Ejercicio 14 Pagina 261 Capitulo 13

(a) *solucion en el libro*

(b) *solucion en el libro*

(c) $\exists x Px \rightarrow \exists x(Px \vee Qx)$
*Es verdad logica.* ya que si existe un Px es necesariamente verdad que existira un elemento que será Px también. El Valor de Qx no importa en tanto que disyuncion

(d) $\forall x Px \rightarrow \exists x(Px \vee Qx)$
*Es verdad logica.* ya que Si se da el caso del subconjunto del domoinio, en este caso P, entonces, necesariamente se ha de dar el caso que haya un elemento del mismo subconjunto P

(e) $\forall x Px \rightarrow \forall x(Px \vee Qx)$
*Es verdad logica.* por el mismo motivo que anteriormente. Si el dominio coincide con el subconjunto como dice el antecedente, necesariamnte el dominio concidira con el mismo subconunto ( No sabemos si con otro subconuto )

(f) $\forall x \exists y Rxy \rightarrow \exists y \forall x Rxy$
**Not valid**

(g) $\exists y \forall x Rxy \rightarrow \forall x \exists y Rxy$
**Valid: we have seen this in class!**

(h) $\exists x \neg(Px \wedge \neg Px)$
Como $(Px \wedge \neg Px)$ nunca podrá ser verdad porque no se puede dar el caso que algo sea y no sea a la vez, su negación será siempre verdadera y por tanto será cierto que hay un elemento x que la cumple

(i) $(Pc \wedge Qc) \rightarrow \exists x Px$
*Es verdad logica.* Suponiendo que "c" es una constante, si queremos falsear

la formula necesitamos hacer el antecedente verdadero y el consecuente falso. Para hacer el antecedente verdadero nos hemos de comprometer en que P y Q comparten un elmento del dominio en sus respectivos subconjuntos del mismo. Si esto es cierto, será necesariamente cierto que existira un elemento que sea de P

(j) $(Pc \wedge Qc) \rightarrow \exists x(Qx \vee \neg Px)$
*Es verdad logica.* Igual que antes, para hacer el antecedente verdadero y el consecuente falso, hemos de darle un mismo valor a P y Q. Si lo hacemos, necesariamente existirá un valor que hará verdad a Q y al ser una disyunción, da igual que P sea falso

(k) $(Pc \vee Qc) \rightarrow \exists xQx$
*No es verdad logica.* Si decimos que el valor de Q es un conjunto Vacio, entonces el antecedente sigue siendo verdadero y el consecuente es falso en tanto que no existe ningun elemento que pertenezca a dicho subconjunto.

(l) $(Pc \vee Qc) \rightarrow \exists x(Px \vee Qx)$
*Es verdad logica.* Ya que, para hacer veradero el antecedente, necesitamos que uno de los dos valores sea P o Q sea cierto. Si es el caso, necesariamente, existirá un valor que será cierto en P o Q

(m) $Pc \rightarrow \forall xPx$
*No es verdad logica.* Ya que estamos asumiendo que Si se da el caso que hay un subconjunto del Dominio entonces este subconjunto será igual al dominio. Los valores que lo harían falso serían Dominio = 1,2,3 P = 1,3 c = 1 . P no sería igual al dominio.

**Perfect**

# 4 Ejercicio 34 Pagina 267 Capitulo 13

Dominio : Conjunto de las personas
P : Hombres
Q : Mujeres
R : x es progenitor de y
S : x es hermano de y
T : x es antepasado de y
c : Carlos
d : Dora
e : Ester

(a) Dora es madre de Ester
*Hay una mujer que es dora y que es progenitor de Ester*
$Qd \wedge Rde$

(b) Dora es tía de Carlos
*El hermano de Dora es progenitor de Carlos*
$\exists x(Sxd \wedge Rxc)$

(c) Carlos es abuelo de Dora
*El hijo de Carlos es padre de Dora*
$\exists x(Px \wedge Rcx \wedge Rxd)$
**"hijo" is not unique; father is... Carlos is also grandfather in case this goes via his daughter. Simply say** $\exists x\ (Rcx \wedge Rxd)$

(d) Dora es nieta de Carlos
$\exists x(Qd \wedge Rcd \wedge Rcx)$
**see previous (after correcting the typo...)**

(e) Todo el mundo tiene padre
$\forall x \exists y(Py \wedge Ryx)$

*No tengo muy claro si el planteamiento es el adecuado, si es el caso, seguiré con las restantes* **Muy adecuado!**

(f) Todo el mundo tiene progenitores

(g) Nadie es progenitor de sí mismo

(h) Algunos no tienen hermanos

(i) Los antepasados de Dora son antepasados de ester

(j) Hay quienes tienen hijos y quienes no

(k) Dos personas son hermanas si y solo si tienen los mismos progenirotes

(l) Dora es hermana de un hijo de Carlos

(m) Un progenitor de un antepasado es un antepasado

(n) Los padres son antepasados

(o) Nadie es progenitor de sus hermanos

(p) Dora es abuela materna de Ester

(q) Ester es biscabuela de Carlos

(r) Todo el mundo tiene abuelos

(s) Todo el mundo tiene bisabuelos

## 5 Ejercicio 6 Pagina 285 Capitulo 14

6 - Obtenga para cada una de las fórmulas siguientes una formula equivalente en forma prenexa

(a) $\forall x Px \rightarrow \exists y Qy$
$\exists xy(Px \rightarrow Qy)$

(b) $\forall x Px \rightarrow \exists x Rxc$
$\exists xy(Px \rightarrow Rxc)$ /* No tengo muy claro como tratar "c". **You have treated the name $c$ right but should rename variables! (I guess you did this but then made a typo...) so that the correct answer is:**

$$\exists xy(Py \rightarrow Rxc)$$

(c) $\forall x(Px \rightarrow \exists x Rxy)$
$\forall x \exists y(Px \rightarrow Rxy)$ /* En los casos en los que la variable pasa de estar libre a ligada,( en este caso la "y" ) no se si se debe substituir por "z" ( o otra variable ) para que quedara libre tal como está en la formula original. ( No se cual es el código latex para hacer la substitucion ( [y - z ] ) */ **Indeed, you will need to make some substitution. I commented till here since I had no more time.**

(d) $\exists x(Px \wedge \forall y Rxy)$
$\exists x \forall y(Px \wedge Rxy)$

(e) $\forall x(Px \vee \forall y Rxy)$
$\forall xy(Px \vee Rxy)$

(f) $\exists x Px \rightarrow \exists y Qy$
$\forall x \exists y (Px \rightarrow Qy)$

(g) $\exists x Px \rightarrow \forall y Qy$
$\forall xy (Px \rightarrow Qy)$

(h) $\exists x Px \rightarrow \exists z Rxz$
$\forall x \exists z (Px \rightarrow Rxz)$

(i) $\forall x((Px \wedge \forall y Rxy) \rightarrow \exists z Sxz)$
Informo de los pasos realizados
1 ) $\forall y(Px \wedge Rxy)$ // empezamos sacando el cuantificador del antecedente
2 ) $\forall x(\forall y(Px \wedge Rxy) \rightarrow \exists z Sxz)$ //Lo encajamos en la formula inicial
3 ) $\forall x \exists z(\forall y(Px \wedge Rxy) \rightarrow Sxz)$ // Sacamos el cuantificador del consecuente
4 ) $\forall x \exists z y((Px \wedge Rxy) \rightarrow Sxz)$ //Sacamos el cuantificador del antecedente

(j) $\forall x((Px \vee \exists y Rxy) \rightarrow \forall z Sxz)$
1 ) $\forall xz((Px \vee \exists y Rxy) \rightarrow Sxz)$ //Sacamos el cuantificador del consecuente
2 ) $\forall xz(\exists y(Px \vee Rxy) \rightarrow Sxz)$ // Sacamos el cuantificador de la disyuncion
3 ) $\forall xzy((Px \vee Rxy) \rightarrow Sxz)$ //Sacamos el cuantificador del antecedente

(k) $\forall x(\exists y Rxy \vee \exists y Ryx) \rightarrow \exists z Sxz$
$\exists z(\forall x(\exists y Rxy \vee \exists y Ryx) \rightarrow Sxz)$ //Quitamos el cuantificador del consecuente
$\exists z(\forall x \exists y(Rxy \vee Ryx) \rightarrow Sxz)$ //Quitamos el cuantuficador de la disyuncion
( Ojo hay dos con la misma variable, es correcto unificarlo ? )
$\exists zx \forall y((Rxy \vee Ryx) \rightarrow Sxz)$ // quitamos el cuantificador del antecedente