Introducción a la Lógica

Curso 2017 - 2018

Grupo A3. Aula 405

Eduardo Hermo Reyes

16 de octubre de 2017

Ejercicio 1. *Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas de acuerdo a lo explicado en clase. En caso de que la afirmación sea falsa señale y explique dónde está el error.*

1. *Si α es una fórmula, entonces $\neg(\alpha)$ es una fórmula;*
2. *(p) es una fórmula atómica;*
3. *$\neg p$ es una fórmula atómica;*
4. *$(p \wedge q)$ no es una fórmula atómica;*
5. *Si una fórmula α no es una contradicción, entonces es una tautología;*
6. *Si una fórmula α es una contradicción, entonces $\neg\alpha$ es una tautología;*
7. *Si una fórmula α no es una tauotlogía, entonces es una contradicción;*
8. *Si una fórmula α es una tautología, entonces $\neg\alpha$ es una contradicción;*
9. *Si α y β son fórmulas contigentes, también lo son $(\alpha \wedge \beta)$ y $(\alpha \vee \beta)$;*
10. *Si α es una contradicción y β una fórmula cualquiera, $(\alpha \wedge \beta)$ es una contradicción;*
11. *Si α y β son tautologías, también los son $(\alpha \wedge \beta)$ y $(\alpha \vee \beta)$.*

Ejercicio 2. *Demuestre los siguientes enunciados:*

1. *Si α es una contradicción, entonces para cualquier fórmula β, $(\alpha \rightarrow \beta)$ es una tautología;*
2. *Si $(\alpha \rightarrow \beta)$ y α son tautologías, entonces también lo es β.*

Ejercicio 3.

1. *Demuestre la siguiente equivalencia lógica:*

$$(p \vee q) \wedge (r \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee p) \equiv p.$$

2. *Halle una asignación que confirme lo siguiente:*

$$(p \vee r \vee t) \wedge (r \vee p) \wedge (\neg t \vee \neg r \vee p) \not\equiv p$$

Ejercicio 4. *Diga si las siguientes equivalencias son ciertas o no. En caso de que no sea cierta, de una asignación que lo demuestre:*

1. $p \leftrightarrow p \equiv p$;
2. $(p \leftrightarrow p) \wedge p \equiv p$;
3. $(p \leftrightarrow \neg p) \equiv \neg p$;
4. $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$;
5. $p \to (q \wedge r) \equiv (p \to q) \wedge (p \to r)$;
6. $p \to (p \wedge \neg p) \equiv \neg p$;
7. $(p \vee q) \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$.

Solución al ejercicio 1.

1. **Falsa.** $\neg(\alpha)$ debería ser $\neg\alpha$;
2. **Falsa.** (p) no es una fórmula;
3. **Falsa.** $\neg p$ es una fórmula compuesta;
4. **Verdadera**;
5. **Falsa.** Si α no es una contradicción, entonces puede ser una fórmula contingente o una tautología;
6. **Verdadera**;
7. **Falsa.** Si α no es una tautología, entonces puede ser una fórmula contingente o una contradicción;
8. **Verdadera**;
9. **Falsa.** Por ejemplo, p y $\neg p$ son fórmulas contingentes pero $(p \wedge \neg p)$ es una contradicción y $(p \vee \neg p)$ es una tautología;
10. **Verdadera**;
11. **Verdadera**.

Solución al ejercicio 2.

1. Supongamos que α es una contradicción. Entonces, para toda asignación v, $\overline{v}(\alpha) = F$. Así pues, para cualquier fórmula β, tenemos que para toda asignación v, $\overline{v}(\alpha) = F$ o $\overline{v}(\beta) = V$. Por lo tanto, para toda asignación v, $\overline{v}\big((\alpha \to \beta)\big) = V$. Es decir, que $(\alpha \to \beta)$ es una tautología.
2. Supongamos que $(\alpha \to \beta)$ y α son tautologías. Entonces, para toda asignación v, tenemos que: *a*) $\overline{v}(\alpha) = F$ o $\overline{v}(\beta) = V$, y *b*) $\overline{v}(\alpha) = V$. Por lo tanto, podemos concluir que para toda asignación v, $\overline{v}(\beta) = V$. Es decir, que β es una tatulogía.

Solución al ejercicio 3.

1. Supongamos que $v(p) = V$. Entonces:

   (a) $\overline{v}(p) = V$;
   (b) $\overline{v}\big((p \vee q)\big) = V$;
   (c) $\overline{v}\big((r \vee p)\big) = V$;
   (d) $\overline{v}\big((\neg q \vee \neg r \vee p)\big) = V$;

   y así pues $\overline{v}\big((p \vee q) \wedge (r \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee p)\big) = \overline{v}(p) = V$.

   Supongamos $v(p) = F$ y en busca de una contradicción asumamos que $\overline{v}\big((p \vee q) \wedge (r \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee p)\big) = V$. Entonces:

(a) $\overline{v}(p) = F$;

(b) $\overline{v}\big((p \vee q)\big) = V$;

(c) $\overline{v}\big((r \vee p)\big) = V$;

(d) $\overline{v}\big((\neg q \vee \neg r \vee p)\big) = V$.

De los puntos (a) y (b) deducimos que $v(q) = V$ y de los puntos (a) y (c), que $v(r) = V$ Pero entonces, $\overline{v}(\neq q) = \overline{v}(\neq r) = \overline{v}(p) = F$. Así pues, $\overline{v}\big((\neg q \vee \neg r \vee p)\big) = F$ y por lo tanto, $\overline{v}\big((p \vee q) \wedge (r \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee p)\big) = F$ en contra de nuestro supuesto.

2. Consideremos la siguiente asignación:

$$v(p) = F,\ v(r) = V \text{ y } v(t) = F$$

Si $v(p) = F$ entonces $\overline{v}(p) = F$. Por otro lado, si $v(r) = V$ entonces $\overline{v}\big((p \vee r \vee t)\big) = V$ y $\overline{v}\big((r \vee p)\big) = V$. Finalmente, si $v(t) = F$, entonces $\overline{v}(\neg t) = V$ y así, $\overline{v}\big((\neg t \vee \neg r \vee p)\big) = V$. Con lo anterior podemos observar que $\overline{v}\big((p \vee r \vee t) \wedge (r \vee p) \wedge (\neg t \vee \neg r \vee p)\big) = V$ y, sin embargo, $\overline{p} = F$. Es decir, existe una asignación para las que ambas fórmulas obtienen valores de verdad distintos.

Solución al ejercicio 4.

1. **Falsa.** Consideremos la asignación $v(p) = F$. Entonces $\overline{v}(p \leftrightarrow p) = V$ y $\overline{v}(p) = F$;

2. **Verdadera**;

3. **Falsa.** Consideremos la asignación $v(p) = F$. Entonces $\overline{v}(\neg p) = V$ y $\overline{v}(p \leftrightarrow \neg p) = F$;

4. **Verdadera**;

5. **Verdadera**;

6. **Verdadera**;

7. **Falsa.** Consideremos la asignación $v(p) = F$, $v(q) = V$ y $v(r) = F$. Entonces $\overline{v}\big((p \vee q) \rightarrow r\big) = F$, ya que $\overline{v}\big(p \vee q\big) = V$ pero $\overline{v}(r) = F$. Por otro lado, $\overline{v}\big((p \rightarrow r)\big) = V$ ya que $v(p) = F$ y $v(r) = F$. Por lo tanto, $\overline{v}\big((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)\big) = V$.

   Otra respuesta válida sería la asignación $v(p) = V$, $v(q) = F$ y $v(r) = F$. La comprobación de los detalles queda como ejercicio.